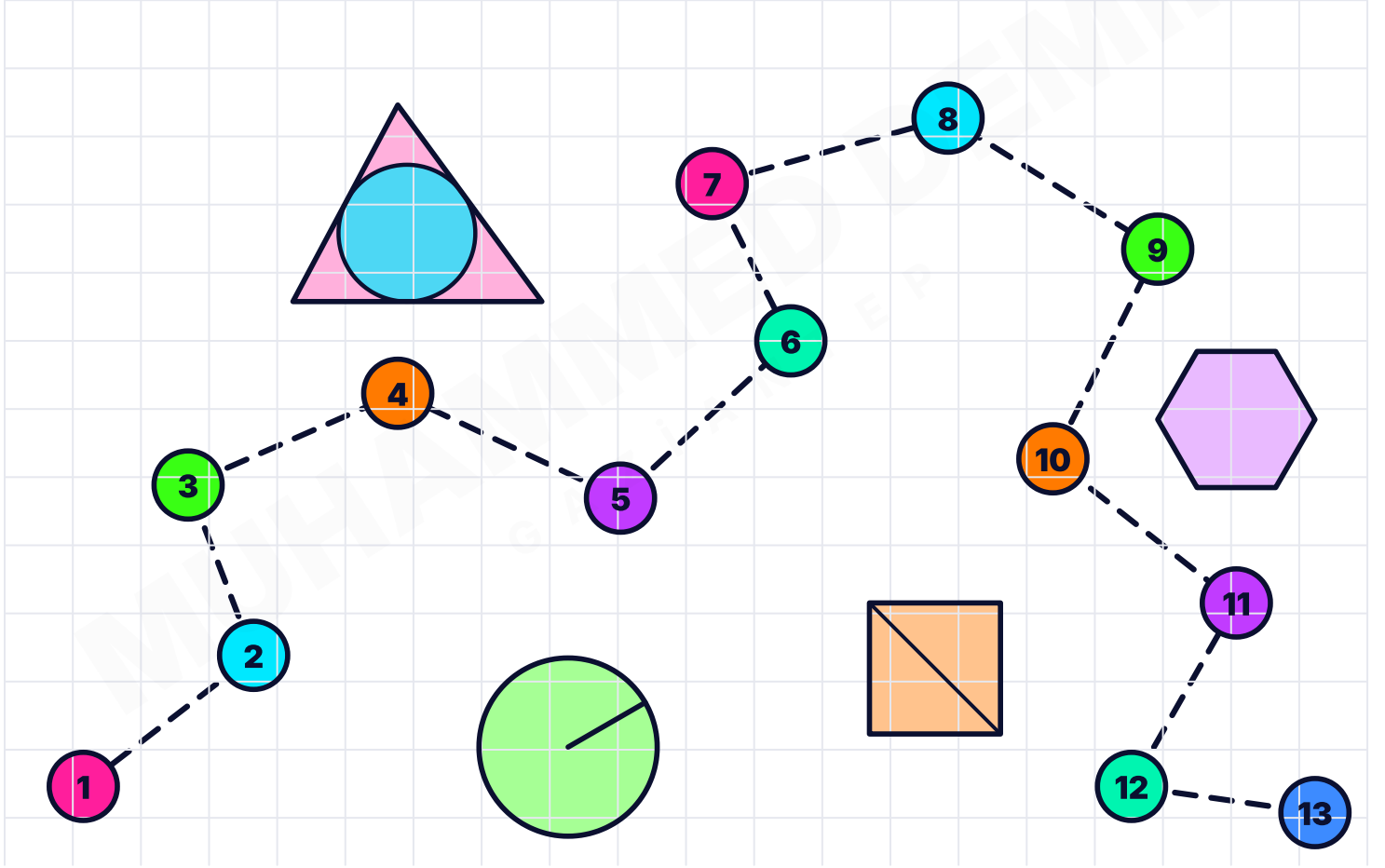


GEOMETRİ

ROTASI

13 durakta tüm kurallar · her kuralın nereden geldiği · dünyadan ipuçları



1 Temel Kavramlar ve Açılar

4 Eşlik ve Benzerlik

7 Üçgende Alan

10 Analitik Geometri

13 Meraklısına

2 Üçgende Açılar

5 Özel Üçgenler

8 Çokgenler ve Dörtgenler

11 Dönüşüm Geometrisi

3 Kenar-Açı Bağlantıları

6 Yardımcı Elemanlar

9 Çember ve Daire

12 Katı Cisimler

★ Bu kitap nasıl okunur?

- Konular **13 durakta**, temelden ileriye doğru sıralanmıştır; her durak bir öncekinin üzerine kurulur.
- Her kutunun numarası (ör. **9.6**) durak ve kutu sırasını gösterir.
- Sağ kenardaki renkli **sekmeler** durakları gösterir; kitabı yandan bakarak açabilirsiniz.
- Aradığınızı bulmak için: başta **İçindekiler**, sonda alfabetik **Dizin**.
- Şekiller ölçekli değildir; sayısal bilgi her zaman verilen değerlerden alınır.

◆ Renk ve Kutu Anahtarı

formül Sarı kutu: formül / kural

NEREDEN? Kuralın kısaca nereden geldiği (ispat fikri).

TANIM Tanım

DİKKAT Sık yapılan hata ya da koşul

İPUCU Hız kazandıran ipucu

NOT Ek bilgi

ÜLKE Dünyadan: başka ülkelerin öğrencilerine öğretilen kısa yollar ve ezber cümleleri

Müfredatın biraz ötesi; sınavda doğrudan istenmeyebilir ama işinizi kolaylaştırır.

MERAKLISINA

Aa Ortak Harfler Sözlüğü

Harf	Anlamı (kitap boyunca hep aynı)
$A, B, C / a, b, c$	köşeler / karşısındaki kenarlar ($a = BC $)
h_a, V_a, n_A	a 'ya ait yükseklik, A 'dan kenarortay, A açısı
u	yarı çevre $\frac{a+b+c}{2}$
r / R	iç teğet / çevrel çember yarıçapı
G, I, O, H	ağırlık, iç teğet, çevrel, diklik merkezi
Dik üçgen	dik açı A 'da; a hipotenüs; p, k izdüşümler ($p + k = a$)
Dörtgen	a, b, c, d kenarlar; $e = AC , f = BD $ köşegenler
Çember	O merkez, r yarıçap, $2r$ çap, d merkezin uzaklığı
İki çember	$d = O_1 O_2 $ merkezler arası uzaklık
$A(ABC)$	ABC 'nin alanı; $\mathcal{C}$ çevre, V hacim
$m(\widehat{ABC}), m(\widehat{AB})$	açı ölçüsü, yay ölçüsü

1 Temel Kavramlar ve Açılar

Temel Tanımlar	4
Doğru Parçası ve Işın	5
Açı ve Ölçüsü	6
Açı Çeşitleri	7
Paralel Doğrulara Açılar	8

2 Üçgende Açılar

Üçgende Açılar: Temel Kurallar	9
Üçgende Özel Açı Şekilleri	10
Açıortayların Oluşturduğu Açılar	11

3 Kenar-Açı Bağlılıkları

Kenar-Açı Bağlılıkları	12
Uzunluk Sınırları ve Sıralamalar	13

4 Eşlik ve Benzerlik

Üçgenlerde Eşlik	14
Üçgenlerde Benzerlik	15
Benzerlik Modelleri: Thales ve Akraları	16

5 Özel Üçgenler

İkizkenar ve Eşkenar Üçgen	17
Dik Üçgen: Pisagor ve Öklid	18
Özel Açılı Dik Üçgenler	19
Dik Üçgende Trigonometri ve Ek Bağlılıklar	20

6 Yardımcı Elemanlar

Açıortay	21
Kenarortay ve Ağırlık Merkezi	22
Yükseklik, Orta Taban ve Orta Dikme	23
Üçgende Dört Merkez	24

7 Üçgende Alan

Üçgende Alan Formülleri	25
Alan Oranları	26

8 Çokgenler ve Dörtgenler

Çokgenler	27
Düzgün Çokgenler	28
Dörtgenler: Genel Özellikler	29
Yamuk	30
İkizkenar Yamuk ve Dik Yamuk	31
Paralelkenar	32

Dikdörtgen, Eşkenar Dörtgen, Kare	33
Deltoid	34

9 Çember ve Daire

Çemberde Temel Kavramlar ve Gösterim	35
Kirişin Özellikleri	36
Çemberde Açılar (1): Merkez, Çevre, Teğet-Kiriş	37
Çemberde Açılar (2): İç Açı ve Dış Açı	38
Teğet Özellikleri ve Ortak Teğetler	39
Çemberde Uzunluk: Noktanın Kuvveti	40
İki Çemberin Birbirine Göre Konumları	41
Kirişler Dörtgeni ve Teğetler Dörtgeni	42
Çevre, Yay Uzunluğu, Dilim ve Parça	43
Dairede Alan	44

10 Analitik Geometri

Koordinat Sistemi ve Nokta	45
Bölme, Alan ve Ağırlık Merkezi	46
Doğrunun Denklemi	47
İki Doğru: Konum, Açı, Uzaklık	48
Açıortay Denklemleri ve Geometrik Yer	49
Çemberin Analitik İncelenmesi	50
Çembere Teğet ve Radikal Eksen	51

11 Dönüşüm Geometrisi

Öteleme, Yansıma ve Dönme	52
Homoteti ve Simetri	53

12 Katı Cisimler

Uzayda Temel Kavramlar	54
Dikdörtgenler Prizması ve Küp	55
Prizmalarda Alan ve Hacim	56
Piramitler	57
Silindir ve Koni	58
Küre ve Küre Kesitleri	59
Kesik Piramit ve Kesik Koni	60
Cavalieri İlkesi ve Hacim Oranları	61

13 Meraklısına

Sinüs ve Kosinüs Teoremi	Meraklısına	62
Ceva ve Menelaus	Meraklısına	63
Stewart ve Carnot	Meraklısına	64
Euler Doğrusu, Dokuz Nokta, Dış Teğet Çember	Meraklısına	65
Ptolemaios, Brahmagupta, Varignon	Meraklısına	66
Kelebek Teoremi ve Radikal Merkez	Meraklısına	67

1. DURAK TEMEL TANIMLAR

1.1 Nokta

Boyutu olmayan, yalnızca **konum** belirten temel kavramdır. Büyük harfle adlandırılır: $A, B, C \dots$



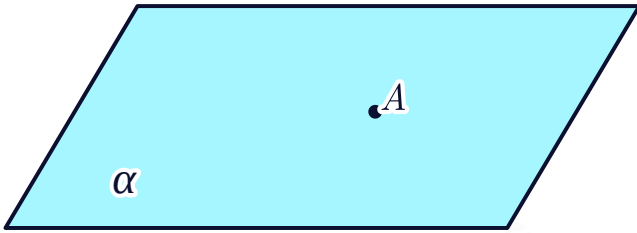
1.2 Doğru

İki yönde sınırsız uzanan, kalınlığı olmayan düz çizgidir. Küçük harfle ($d, k, \dots$) ya da üzerindeki iki noktayla (AB doğrusu) adlandırılır.



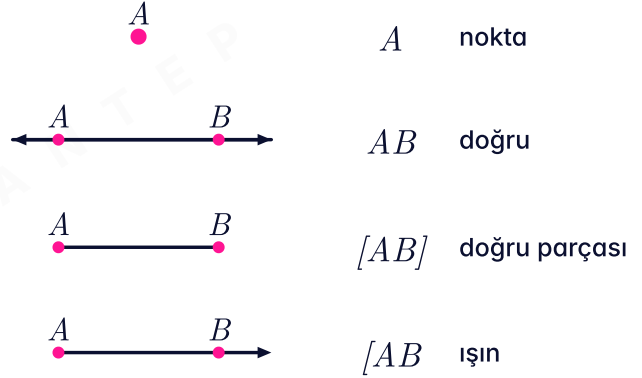
1.3 Düzlem

Her yönde sınırsız uzanan, kalınlığı olmayan düz yüzeydir. α, β, π gibi harflerle gösterilir.



1.4 Temel Gösterimler

NOT Köşeli parantez uç noktanın **dahil** olduğunu, açık uç ise sınırsız devam ettiğini gösterir.



1.5 Doğrusal Noktalar

Aynı doğru üzerinde bulunan noktalara **doğrusal noktalar** denir. Doğrusal olmayan üç nokta bir **üçgen** oluşturur.



1.6 Temel İlkeler (Aksiyomlar)

- Farklı iki noktadan **yalnız bir** doğru geçer.
- Doğrusal olmayan üç nokta **bir** düzlem belirtir.
- Farklı iki doğru en çok **bir** noktada kesişir.
- Bir noktadan sonsuz sayıda doğru geçer.

NEREDEN? Aksiyomlar ispatlanmaz; doğruluğu kabul edilen başlangıç önermeleridir. Geometrideki tüm kurallar bunlardan türetilir (Öklid, *Elemanlar*, MÖ 300).

1. DURAK DOĞRU PARÇASI VE IŞIN

1.1 Doğru Parçası

İki uç noktası olan, **sonlu uzunluktaki** parçadır. Gösterim: $[AB]$, uzunluğu: $|AB|$



1.2 Işın

Bir başlangıç noktasından çıkıp **tek yönde** sınırsız uzanır. Gösterim: $\overrightarrow{AB}$ (başlangıç A)



1.3 Zıt Işınlar

Aynı başlangıç noktasından çıkıp **zıt yönlere** giden ışınlardır: $\overrightarrow{OA}$ ve $\overrightarrow{OB}$. Birleşimleri bir doğrudur.



1.4 Orta Nokta

M, $[AB]$ 'nin orta noktası ise

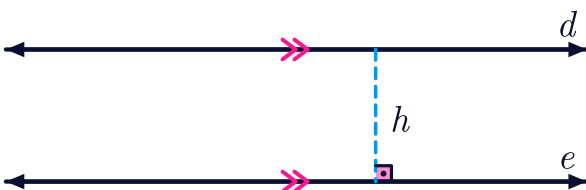
$$|AM| = |MB| = \frac{|AB|}{2}$$



1.5 Paralel Doğrular

Aynı düzlemde olup **kesişmeyen** doğrulardır: $d \parallel e$. Aralarındaki uzaklık (h) her yerde aynıdır.

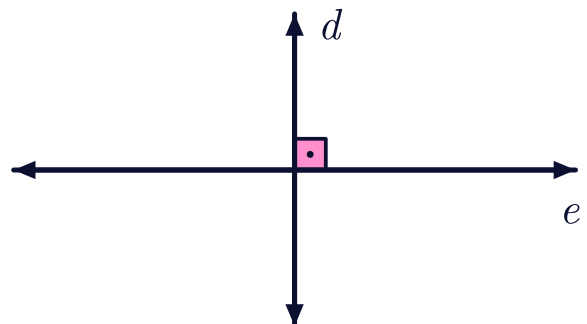
NEREDEN? Bir doğrunun dışındaki bir noktadan ona **yalnız bir** paralel çizilebilir (Öklid'in paralellik postulatı).



1.6 Dik Doğrular

Kesiştiklerinde 90° açı oluşturan doğrulardır: $d \perp e$

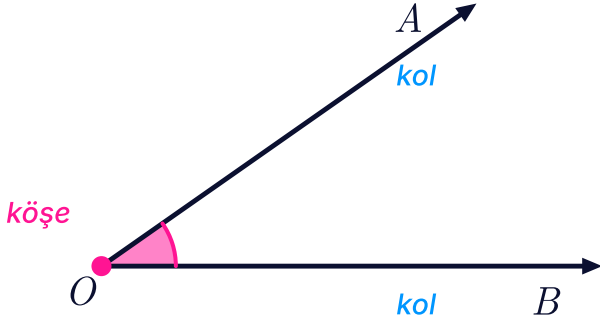
NEREDEN? Aynı düzlemde aynı doğruya dik iki doğru, o doğruyla eş yönde açılar (90°) yaptığından birbirine **paraleldir**.



1. DURAK AÇI VE ÖLÇÜSÜ

1.1 Açı, Köşe ve Kollar

Başlangıç noktaları ortak iki ışının birleşimine **açı** denir. Ortak nokta **köşe**, ışınlar **koldur**.



1.2 Derece

Tam açının 360 eş parçasından biri 1° dir.

$$1^\circ = 60' \quad 1' = 60''$$

NEREDEN? 360 sayısı Babililerden gelir: 60 tabanlı sayı sistemi ve bir yılın yaklaşık 360 gün olması.



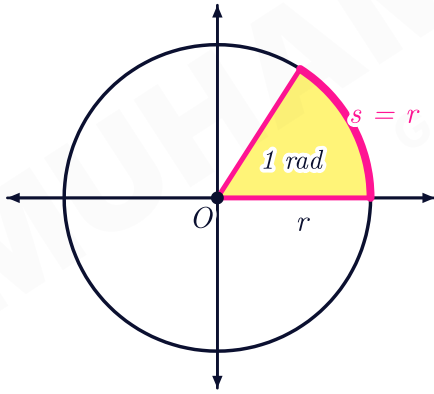
1.3 Radyan

Yarıçap uzunluğundaki yayı gören merkez açının ölçüsü **1 radyan**dır.

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

NEREDEN? Çemberin çevresi $2\pi r$ olduğundan tam açı, 2π tane yarıçap uzunluğunda yay görür.



1.4 Derece – Radyan Dönüşümü

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

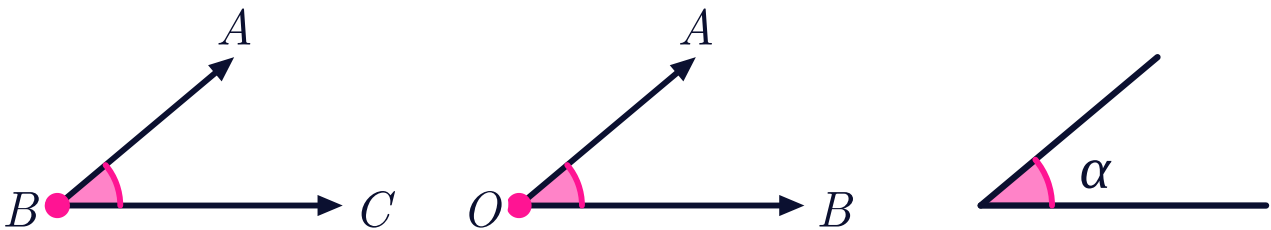
Derece	30°	45°	60°	90°	180°	270°
Radyan	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$

NOT $1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$

NEREDEN? 180° ile π radyan aynı açıdır; orantı kurulur.

1.5 Gösterim

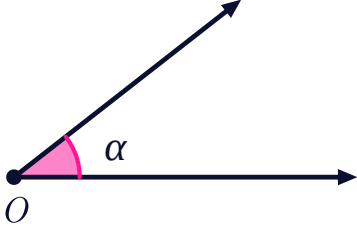
Açı, köşe harfi ortada olacak şekilde okunur. Ölçüsü $m(\widehat{ABC})$, $m(\widehat{AOB})$ ya da kısaca α ile gösterilir.



1. DURAK AÇI ÇEŞİTLERİ

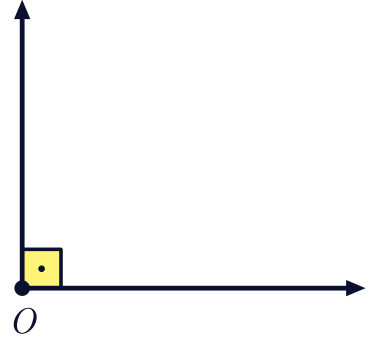
1.1 Dar Açı

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



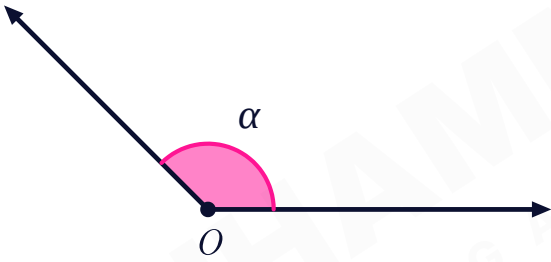
1.2 Dik Açı

$$\alpha = 90^\circ$$



1.3 Geniş Açı

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$



1.4 Doğru Açı ve Tam Açı

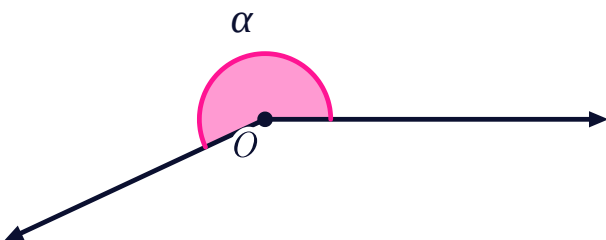
$$\alpha = 180^\circ \quad \alpha = 360^\circ$$



1.5 Refleks Açı

Ölçüsü 180° ile 360° arasındaki açıdır; bir açının "dış tarafı" olarak düşünülebilir.

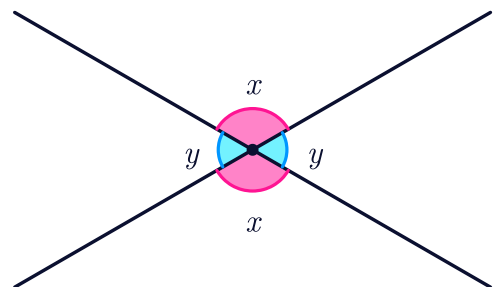
$$180^\circ < \alpha < 360^\circ$$



1.6 Açı İkili

- **Tümler:** toplamı 90°
- **Bütünler:** toplamı 180°
- **Komşu:** köşesi ve bir kolu ortak
- **Ters açılar** eşittir.

NEREDEN? x ve y doğru açığı tamamladığından $x + y = 180^\circ$; karşıdaki açı da y ile 180° yapar, o hâlde o da x tir.

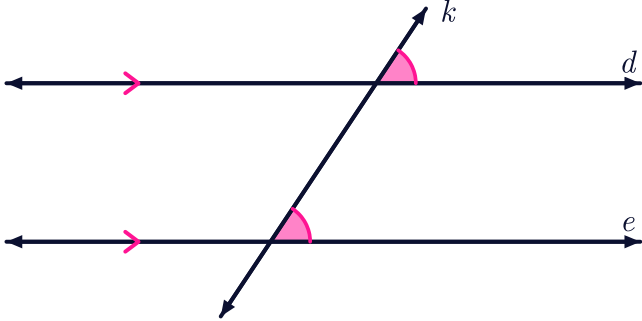


1. DURAK PARALEL DOĞRULARDA AÇILAR

1.1 Yöndeş Açılar (F)

$d \parallel e$ ve k kesen ise yöndeş açılar **eşittir**.

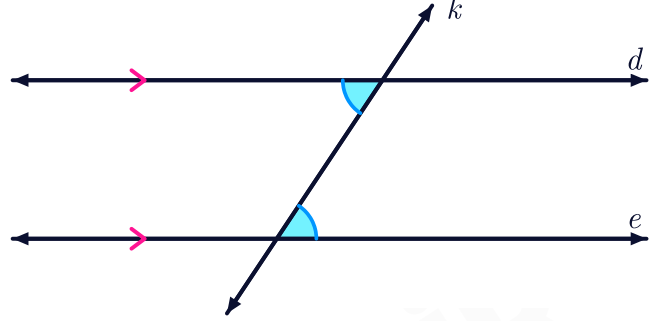
NEREDEN? Parallellik postulatının açı biçimidir: k boyunca kayan doğru, yönünü değiştirmeden e 'ye taşınır.



1.2 İç Ters Açılar (Z)

İç ters açılar **eşittir**.

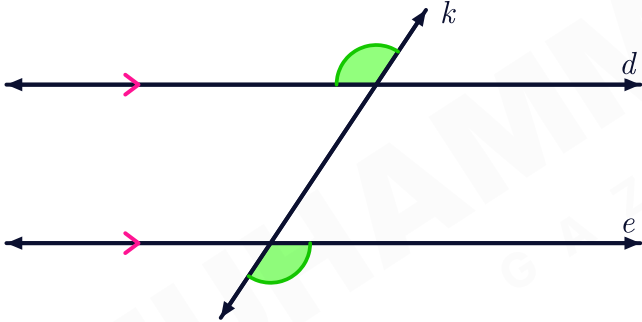
NEREDEN? Yöndeş açı + ters açı: ikisi de aynı yöndeş açıya eşittir.



1.3 Dış Ters Açılar

Dış ters açılar **eşittir**.

NEREDEN? Her biri, iç ters açısının ters açısıdır.

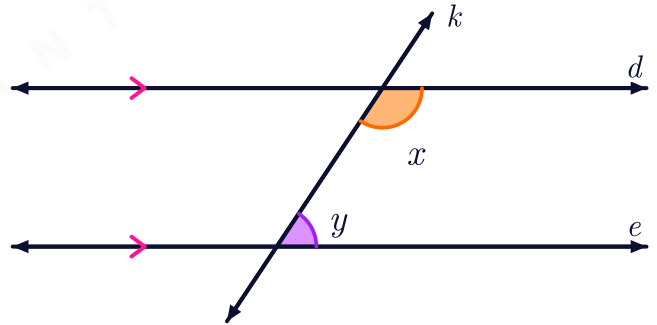


1.4 Karşı Durumlu Açılar (U)

Kesenin aynı tarafında, paralellerin arasında kalan iki açının toplamı 180° dir.

$$x + y = 180^\circ$$

NEREDEN? x 'in yöndeşi y ile doğru açı oluşturur.

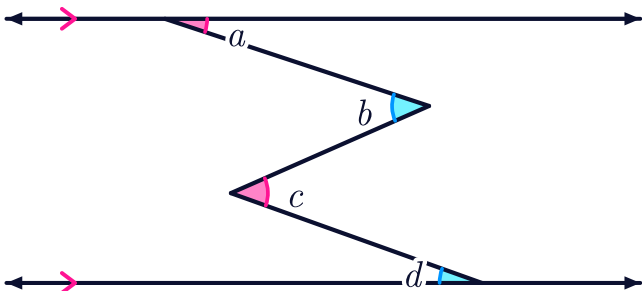


1.5 Kırık Çizgi Kuralı

Paraleller arasındaki kırık çizgide pembe açılar toplamı mavi açılar toplamına eşittir.

$$a + c = b + d$$

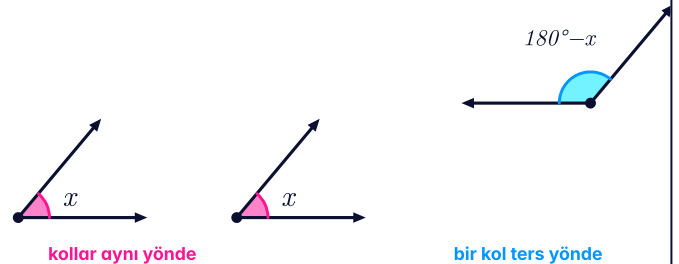
NEREDEN? Her kırılma noktasından paralel çizilir; açılar Z kuralıyla parçalara ayrılıp toplanır.



1.6 Kolları Paralel Açılar

Kolları karşılıklı paralel iki açı ya **eşittir** ya da **bütünlerdir**. Kolları karşılıklı dik iki açı için de aynısı geçerlidir.

NEREDEN? Kollardan birini uzatıp iki kez yöndeş açı yazılır.

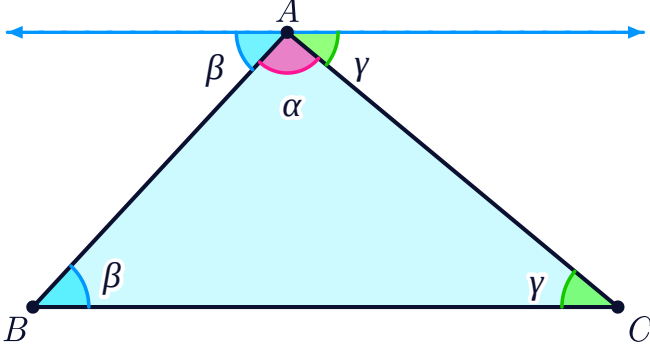


2. DURAK ÜÇGENDE AÇILAR: TEMEL KURALLAR

2.1 İç Açılar Toplamı

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

NEREDEN? A'dan BC'ye paralel çizilir. İç ters açılar β ve γ A'ya taşınır; A'da doğru açı (180°) oluşur.

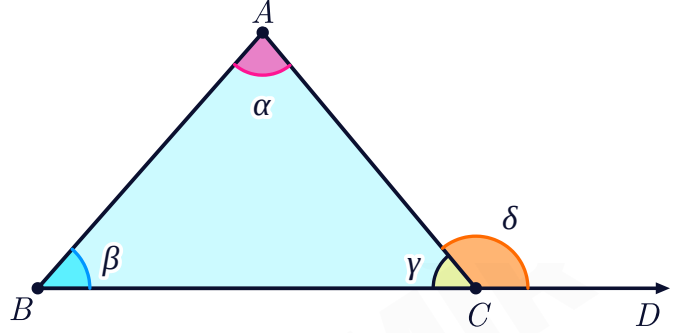


2.2 Dış Açı

Bir dış açı, kendisine **komşu olmayan** iki iç açının toplamına eşittir.

$$\delta = \alpha + \beta$$

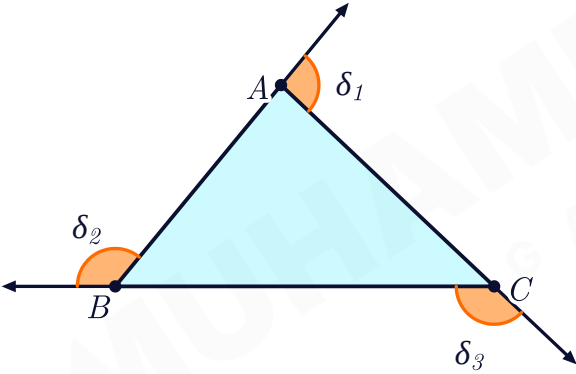
NEREDEN? $\delta + \gamma = 180^\circ$ (doğru açı) ve $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$; ikisi karşılaştırılır.



2.3 Dış Açılar Toplamı

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 360^\circ$$

NEREDEN? Her köşede iç + dış = 180° ; üç köşede 540° . İç açılar (180°) çıkarılınca 360° kalır.

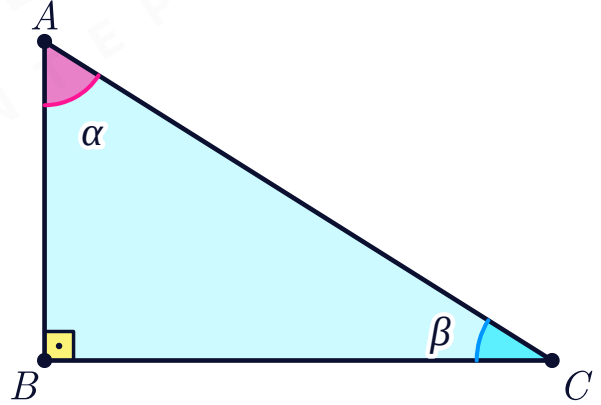


2.4 Dik Üçgende Dar Açılar

Dik üçgenin dar açıları **tümler**dir.

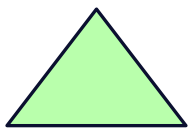
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

NEREDEN? $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

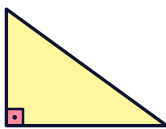


2.5 Açılarına Göre Üçgenler

DİKKAT Bir üçgende en fazla **bir** dik ya da **bir** geniş açı bulunur; aksi hâlde toplam 180° 'yi aşar.



Dar açılı
tüm açılar $< 90^\circ$



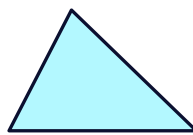
Dik açılı
bir açı $= 90^\circ$



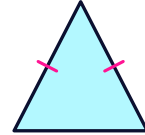
Geniş açılı
bir açı $> 90^\circ$

2.6 Kenarlarına Göre Üçgenler

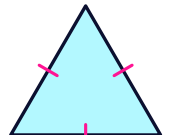
NOT Her eşkenar üçgen aynı zamanda ikizkenardır.



Çeşitkenar
tüm kenarlar farklı



İkizkenar
iki kenar eş



Eşkenar
üç kenar eş

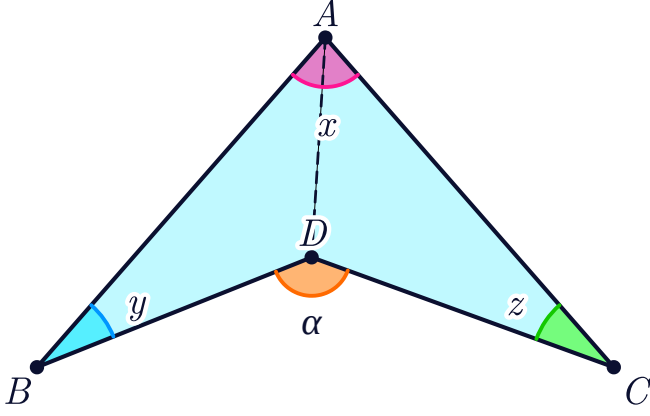
2. DURAK ÜÇGENDE ÖZEL AÇI ŞEKİLLERİ

2.1 Ok (Bumerang) Şekli

$$\alpha = x + y + z$$

$\alpha = m(\widehat{BDC})$: girinti köşesi D 'de, B ile C arasındaki (180° 'den küçük) açı.

NEREDEN? $[AD]$ uzatılır; iki üçgende dış açı kuralı uygulanıp toplanır.

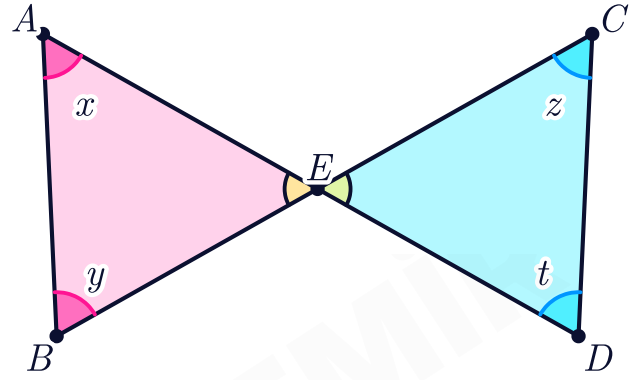


2.2 Kelebek (Papyon) Şekli

$[AD]$ ile $[BC]$ E 'de kesişiyorsa

$$x + y = z + t$$

NEREDEN? E 'deki ters açılar eşit; iki üçgende de kalan açıların toplamı $180^\circ - m(\widehat{E})$ dir.

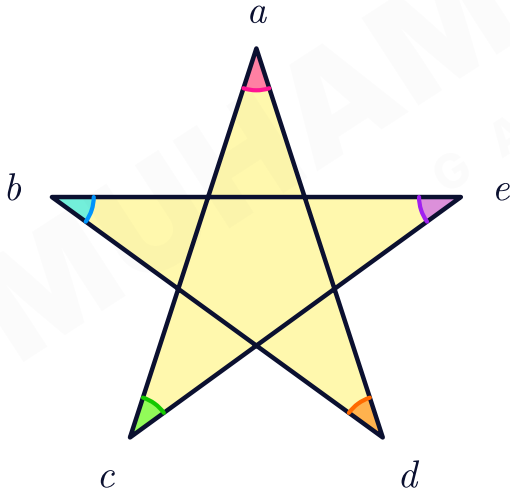


2.3 Beş Köşeli Yıldız

Uçlardaki beş açının toplamı:

$$a + b + c + d + e = 180^\circ$$

NEREDEN? İki uç açının toplamı, iç beşgenin bir köşesinde dış açı olarak birleşir; sonunda bir üçgenin üç iç açısı kalır.

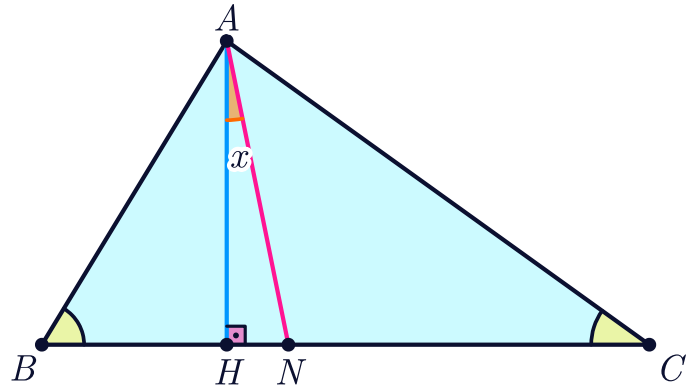


2.4 Yükseklik ile Açıortay Arasındaki Açı

$[AH]$ yükseklik, $[AN]$ açıortay ise

$$x = \frac{|m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})|}{2}$$

NEREDEN? $m(\widehat{BAH}) = 90^\circ - m(\widehat{B})$ ve $m(\widehat{BAN}) = \frac{m(\widehat{A})}{2}$; farkı alınıp $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C}$ yazılır.



2.5 Açı Kovalama Yöntemi

- Bilinen her açıyı şekle yaz; bilinmeyene **harf** ver.
- Üçgende 180° , doğruda 180° , noktada 360° denklemlerini kur.
- İkizkenar gördüğün yerde taban açılarını eşitle.
- Paralel varsa Z, F, U kurallarını ara.

ABD Amerikan olimpiyat hazırlığında bu yönteme **angle chasing** (açı kovalama) denir: hiçbir formül kullanmadan yalnız temel kurallarla zincir kurmak.

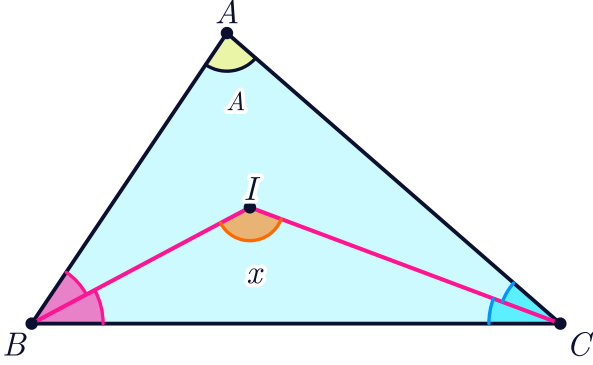
2. DURAK AÇIORTAYLARIN OLUŞTURDUĞU AÇILAR

2.1 İki İç Açortay

B ve C iç açortayları I 'de kesişirse

$$x = 90^\circ + \frac{m(\hat{A})}{2}$$

NEREDEN? BIC üçgeninde $x = 180^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$ ve $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A}$.

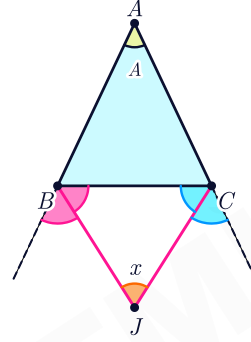


2.2 İki Dış Açortay

B ve C dış açortayları J 'de kesişirse

$$x = 90^\circ - \frac{m(\hat{A})}{2}$$

NEREDEN? B ve C 'deki dış açılar yarısı $\frac{180^\circ - \hat{B}}{2}$ ve $\frac{180^\circ - \hat{C}}{2}$; BJC üçgeninde kalan açı hesaplanır.

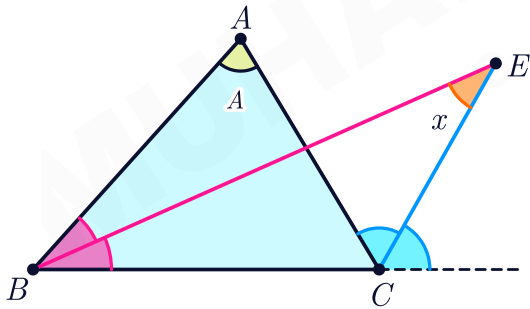


2.3 Bir İç, Bir Dış Açortay

B iç açortayı ile C dış açortayı E 'de kesişirse

$$x = \frac{m(\hat{A})}{2}$$

NEREDEN? Dış açı kuralı iki kez: $\hat{C}_{\text{dış}} = \hat{A} + \hat{B}$ ve yarısı $= x + \frac{\hat{B}}{2}$.

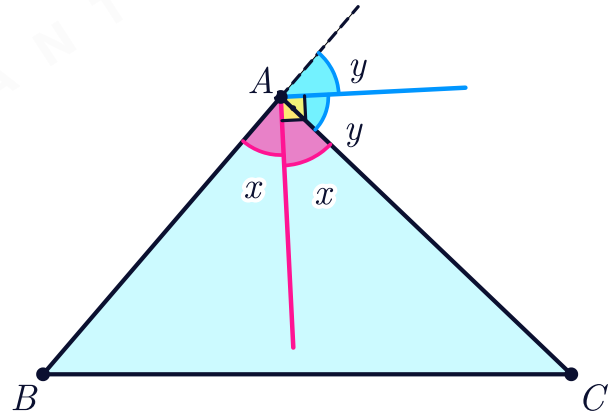


2.4 Aynı Köşedeki İç ve Dış Açortay

Bir köşedeki iç açortay ile dış açortay her zaman **diktir**.

$$x + y = 90^\circ$$

NEREDEN? Doğru açı: $2x + 2y = 180^\circ$.



2.5 Özet

Kesişen açortaylar	Oluşan açı
İki iç (B, C)	$90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$
İki dış (B, C)	$90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$
Biri iç, biri dış	$\frac{\hat{A}}{2}$
Aynı köşede iç ve dış	90°

DİKKAT Bazı kaynaklarda iki dış açortay için yanlışlıkla $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ yazılır; doğrusu $90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$ dir.

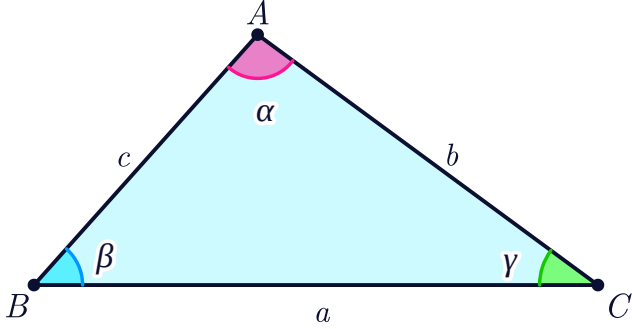
3. DURAK KENAR-AÇI BAĞINTILARI

3.1 Büyük Aç - Büyük Kenar

Büyük açının karşısında büyük kenar bulunur; tersi de doğrudur.

$$\alpha > \beta > \gamma \Leftrightarrow a > b > c$$

NEREDEN? Kısa kenar üzerine uzun kenarın eşi alınırsa ikizkenar üçgen oluşur; taban açısı, karşıdaki açıdan büyük çıkar (dış açı kuralı).

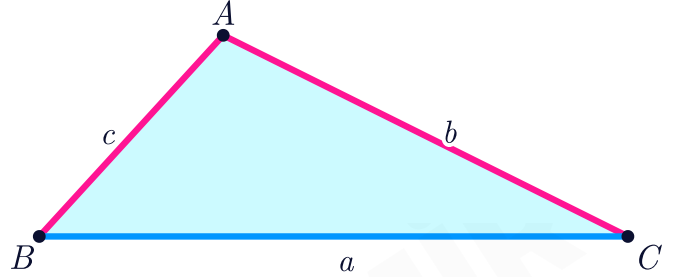


3.2 Üçgen Eşitsizliği

Her kenar, diğer ikisinin **farkından büyük, toplamından küçüktür.**

$$|b - c| < a < b + c$$

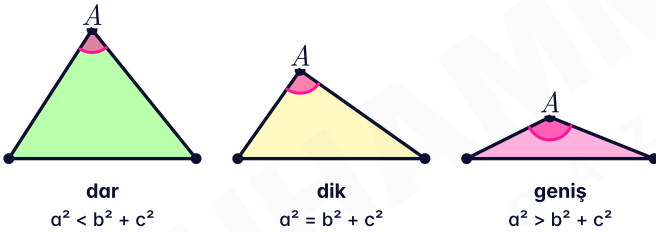
NEREDEN? İki nokta arasındaki en kısa yol doğru parçasıdır: B'den C'ye A üzerinden gitmek, doğrudan gitmekten uzundur.



3.3 Kenarlardan Aç Türü

a en uzun kenar olsun:

NEREDEN? Kosinüs teoreminden: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$; $\cos A$ 'nin işareti açının türünü verir.

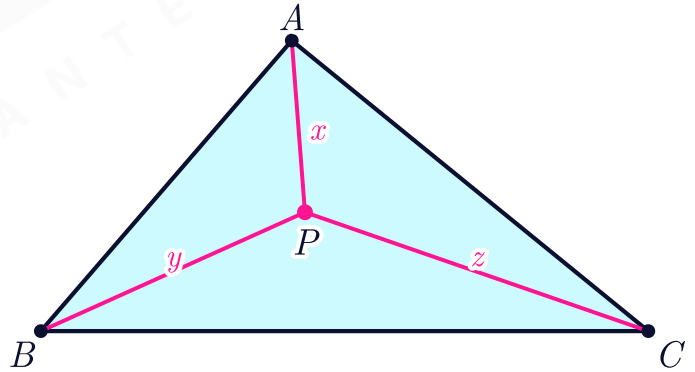


3.4 İç Nokta ile Çevre

P üçgenin içinde, $2u$ çevre ise

$$u < x + y + z < 2u$$

NEREDEN? Alt sınır: PAB, PBC, PCA üçgenlerinde üçgen eşitsizliği yazılıp toplanır. Üst sınır: yanda.

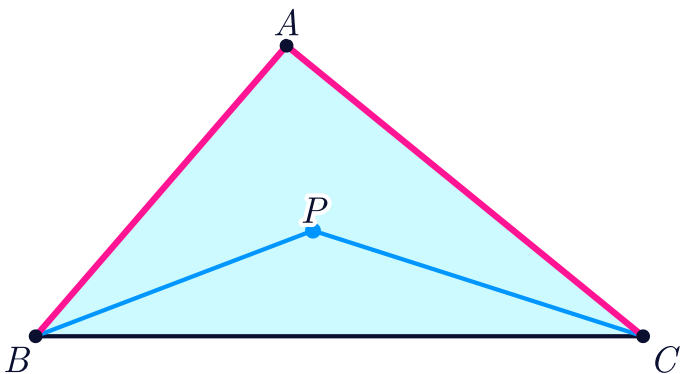


3.5 İç Nokta: Kısa Yol

P, ABC'nin içinde ise

$$|PB| + |PC| < |AB| + |AC|$$

NEREDEN? $[BP]$ uzatılıp AC 'yi kestiği nokta ile iki kez üçgen eşitsizliği uygulanır. Bunu üç köşe için toplamak $x + y + z < 2u$ verir.



3.6 Tam Sayı Kenar Soruları

- Önce $|b - c| < a < b + c$ aralığını yaz.
- Açı türü verildiyse a^2 ile $b^2 + c^2$ 'yi karşılaştır.
- Tüm koşulları birlikte (kesişim) al.

DIKKAT Eşitlik olmaz: $a = b + c$ ise noktalar doğrusaldır, üçgen oluşmaz.

HİNDİSTAN Ravi dönüşümü: $a = y + z, b = x + z, c = x + y$ ($x, y, z > 0$) yazılınca üçgen eşitsizliği kendiliğinden sağlanır. Olimpiyat hazırlığında çok kullanılır.

3. DURAK UZUNLUK SINIRLARI VE SİRALAMALAR

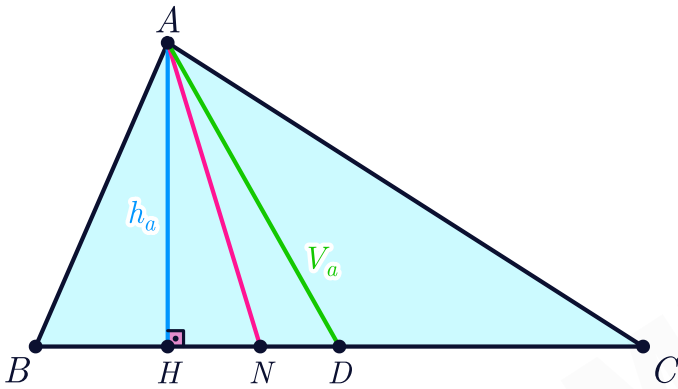
3.1 Yükseklik $\leq$ Açıortay $\leq$ Kenarortay

Aynı köşeden çizilen üç doğru parçası için

$$h_a \leq n_A \leq V_a$$

Eşitlik yalnız $b = c$ (ikizkenar) iken olur.

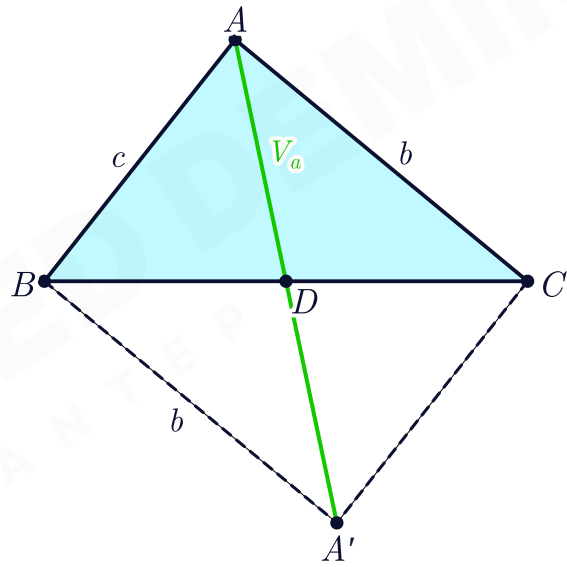
NEREDEN? Dikme, bir noktadan doğruya en kısa yoldur; N her zaman H ile D arasında kalır.



3.2 Kenarortay Sınırı

$$\frac{|b-c|}{2} < V_a < \frac{b+c}{2}$$

NEREDEN? Kenarortay iki katına uzatılır (A'); $ABA'C$ paralelkenar olur. ABA' üçgeninde kenarlar $c, b, 2V_a$ ve üçgen eşitsizliği uygulanır.



3.3 Açı Sıralamasından Kenar Sıralamasına

- Önce bütün açıları bul (180° kuralı).
- En büyük açının karşısı en uzun kenar.
- Birden çok üçgen varsa **ortak kenar** üzerinden zincir kur: $[BD]$ hem ABD hem BCD 'de kenardır.

3.4 Uyarılar

- Kenar uzunluğu sorulduğunda şeklin **ölçekli olmadığını** varsay.
- İkizkenar üçgende taban açıları dar olmak zorundadır.
- Bir üçgenin en büyük açısı en az 60° , en küçük açısı en çok 60° dir.

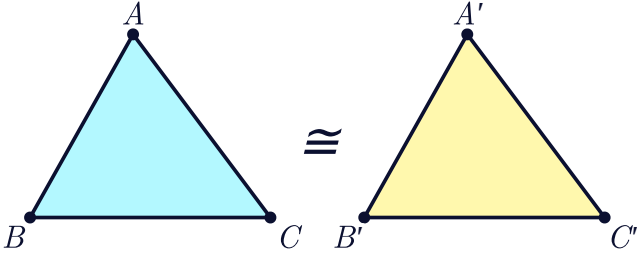
NEREDEN? Son madde: üç açı da 60° 'den küçük olsaydı toplam 180° 'ye ulaşamazdı.

4. DURAK ÜÇGENLERDE EŞLİK

4.1 Eşlik Nedir?

Karşılıklı bütün kenarları ve açıları eş olan üçgenlere **eş üçgenler** denir. Biri, öbürünün üzerine tam olarak çakıştırılabilir.

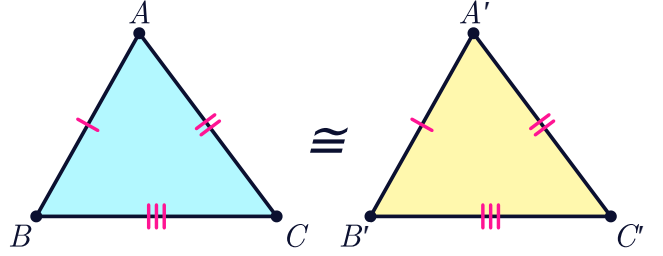
$$ABC \cong A'B'C'$$



4.2 KKK Eşliği

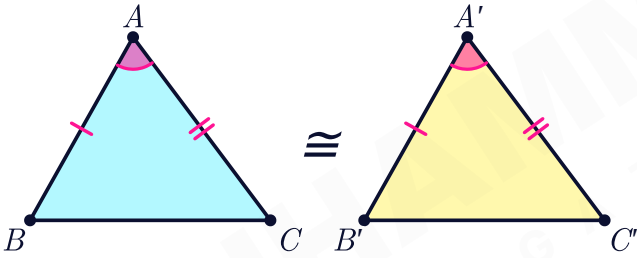
Üç kenarı karşılıklı eş olan üçgenler eştir.

NEREDEN? Üç kenarı verilen üçgen pergelde **tek biçimde** çizilebilir.



4.3 KAK Eşliği

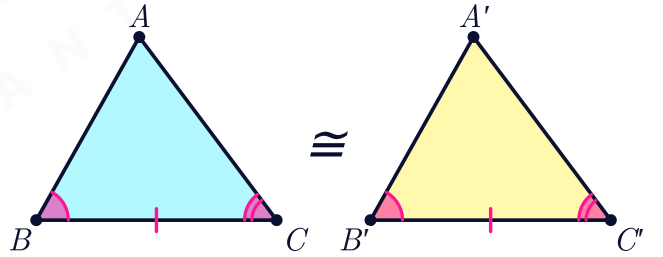
İki kenarı ve bu kenarların **arasındaki** açısı eş olan üçgenler eştir.



4.4 AKA ve AAK Eşliği

İki açısı ve **karşılık gelen** bir kenarı eş olan üçgenler eştir.

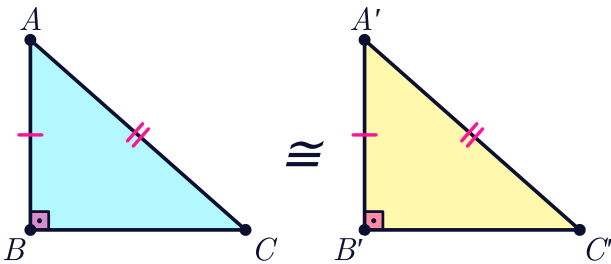
NEREDEN? İki açı eşse üçüncü açı da eştir (180°). Böylece AAK durumu AKA'ya dönüşür.



4.5 Dik Üçgende HK Eşliği

Hipotenüsleri ve birer dik kenarları eş olan dik üçgenler eştir.

NEREDEN? Pisagor teoremiyle üçüncü kenar da eş çıkar; KKK uygulanır.



4.6 Eşlik Vermeyen Durumlar

- **Açılar eş, kenar yok:** Yalnız iki açının (dolayısıyla üç açının) eş olması eşlik vermez; **benzerlik** verir.
- **KKA:** İki kenar ve bu kenarların arasında **olmayan** bir açının eş olması genel olarak eşlik vermez.

İPUCU Harf sırası eşleşmeyi gösterir:

$$ABC \cong DEF \text{ ise } |AB| = |DE|, m(\hat{B}) = m(\hat{E})$$

...

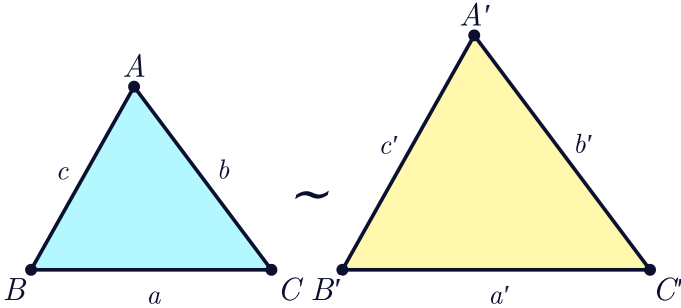
4. DURAK ÜÇGENLERDE BENZERLİK

4.1 Benzerlik Nedir?

Karşılıklı açıları eş, karşılıklı kenarları **orantılı** üçgenlere benzer üçgenler denir.

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

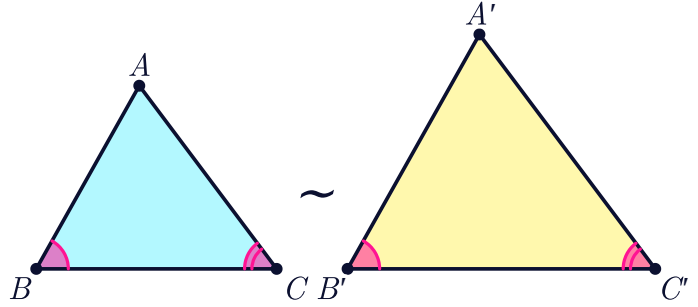
k : benzerlik oranı



4.2 AA Benzerliği

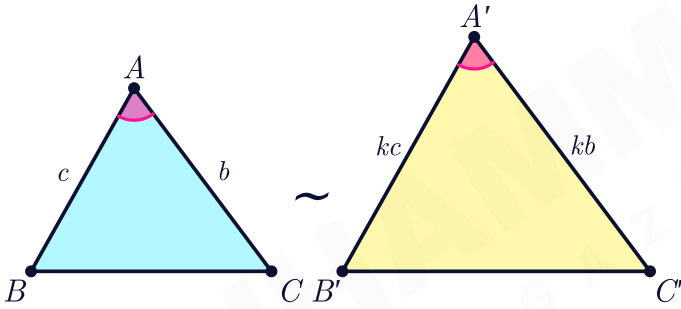
İki açısı eş olan üçgenler benzerdir.

NEREDEN? Üçüncü açılar kendiliğinden eşittir; şekil aynı, yalnız ölçek farklıdır.



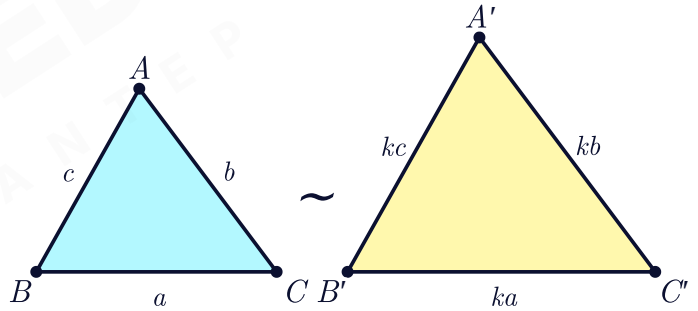
4.3 KAK Benzerliği

Bir açısı eş ve bu açığı oluşturan kenarları orantılı üçgenler benzerdir.



4.4 KKK Benzerliği

Üç kenarı orantılı üçgenler benzerdir.



4.5 Benzerlikte Oranlar

Benzer üçgenlerde	Oran
Kenarlar, çevreler	k
Yükseklik, kenarortay, açıortay	k
İç ve çevrel çember yarıçapı	k
Alanlar	k^2

NEREDEN? Alan iki uzunluğun çarpımıyla hesaplanır ($\frac{\text{taban} \cdot h}{2}$); her uzunluk k katına çıkınca alan $k \cdot k = k^2$ katına çıkar.

4.6 Eşleştirme Kuralı

Eş açılarının **karşısındaki** kenarlar karşılık gelir.

DİKKAT Benzerlik oranını yazmadan önce eşleşmeyi harf sırasıyla yaz: $ABC \sim DEF$ ise $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}$

NOT Benzerlik oranı $k = 1$ olan üçgenler eştir.

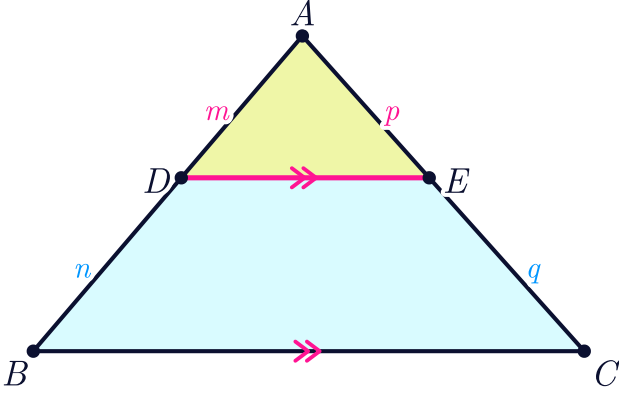
4. DURAK BENZERLİK MODELLERİ: THALES VE AKRABALARI

4.1 Temel Orantı (A Modeli)

 $DE \parallel BC$ ise $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$$\frac{m}{m+n} = \frac{p}{p+q} = \frac{|DE|}{|BC|}$$

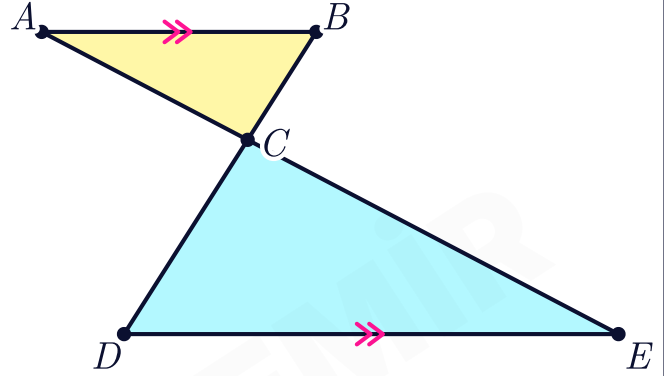
$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

NEREDEN? Yöndeş açılar eşit olduğundan AA benzerliği.

4.2 Kelebek (X Modeli)

 $AB \parallel DE$ ise $\triangle ABC \sim \triangle EDC$

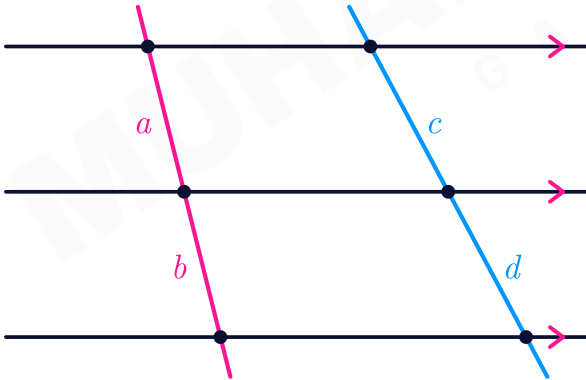
$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|CE|} = \frac{|BC|}{|CD|}$$

NEREDEN? İç ters açılar ve ters açılar eşit: AA benzerliği. Dikkat: A ile E, B ile D karşılık gelir (çapraz eşleşme).

4.3 Thales: Paralel Bantlar

Paralel doğrular, kesenler üzerinde **orantılı** parçalar ayırır.

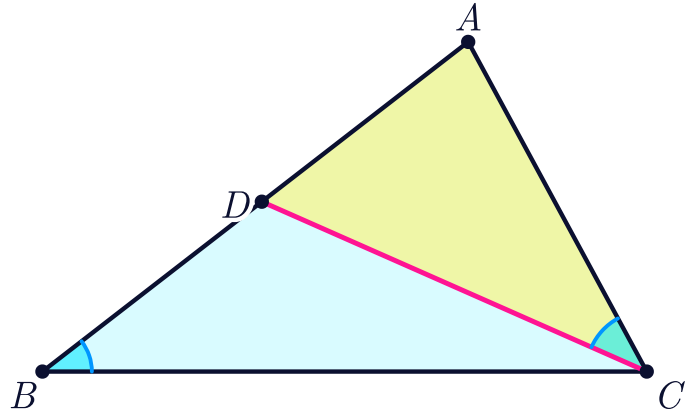
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

NEREDEN? Kesenlerden biri öbürüne paralel kaydırılınca A modeli ortaya çıkar.

4.4 Anne-Yavru Modeli

 $D \in [AB]$ ve $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{B})$ ise $\triangle ACD \sim \triangle ABC$

$$|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$$

NEREDEN? Ortak açı ($\widehat{A}$) ve eş açı ($\widehat{B}$): AA benzerliği. Oran yazılınca $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|}$.

4.5 Dünyadan: Benzerliği Görme Alışkanlığı

- Bir paralel gördüğünde hemen **A** ya da **X** modelini ara.
- Ortak açılı iç içe üçgenlerde **anne-yavru** modelini ara.
- Dik üçgende hipotenüse yükseklik varsa üç benzer üçgen vardır (5. Durak).

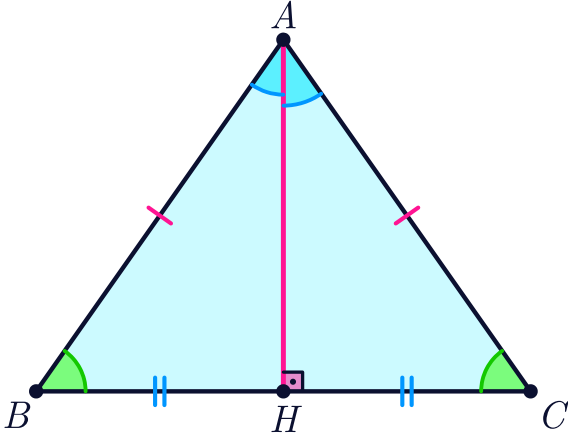
ÇİN Çin ortaokul geometrisinde benzerlik soruları hazır modellerle çözülür: **A字型** (A modeli), **8字型** (X modeli) ve **母子型** (anne-yavru modeli). Öğrenci şekilde önce modeli arar, sonra oranı yazar.

5. DURAK İKİZKENAR VE EŞKENAR ÜÇGEN

5.1 İkizkenar Üçgen

$|AB| = |AC|$ ise taban açıları eşittir. Tepeden tabana inen **yükseklik**, aynı zamanda **kenarortay**, **açıortay** ve tabanın **orta dikmesidir**.

NEREDEN? ABH ve ACH üçgenleri HK kuralıyla eştir.



5.2 Tabandan Dikmeler

$|AB| = |AC|$, $P \in [BC]$ ise

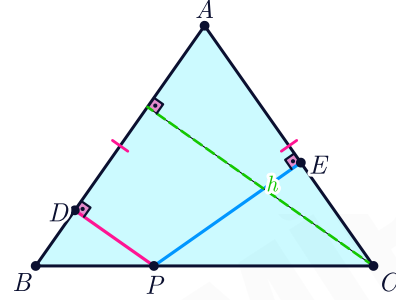
$$|PD| + |PE| = h$$

h : yan kenara ait yükseklik. P taban uzantısında ise

$$||PD| - |PE|| = h$$

NEREDEN? Alanla: $A(ABC) = A(ABP) + A(ACP)$ yazılıp

$\frac{|AB|}{2}$ ile sadeleştirilir.

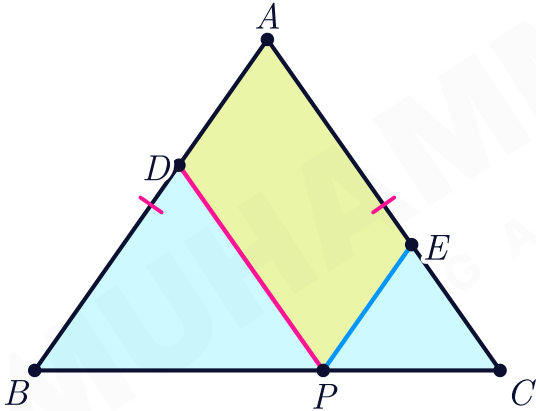


5.3 Tabandan Paraleller

$|AB| = |AC|$, $PD \parallel AC$, $PE \parallel AB$ ise

$$|PD| + |PE| = |AB|$$

NEREDEN? DBP ikizkenardır ($|DB| = |DP|$) ve $ADPE$ paralelkenardır ($|AD| = |PE|$).

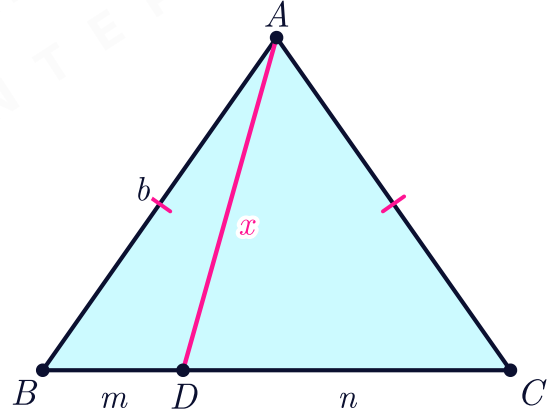


5.4 Tabana Çizilen Doğru Parçası

$|AB| = |AC| = b$, $D \in [BC]$ ise

$$x^2 = b^2 - m \cdot n$$

NEREDEN? A' 'dan inen yükseklikle iki kez Pisagor yazılır; ya da Stewart teoreminin özel hâlidir.

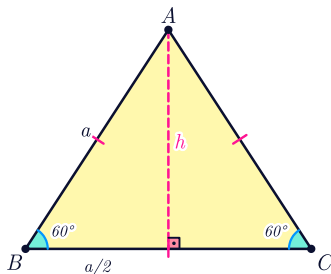


5.5 Eşkenar Üçgen

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Alan} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

NEREDEN? Yükseklik, üçgeni iki tane $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ üçgenine ayırır: $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

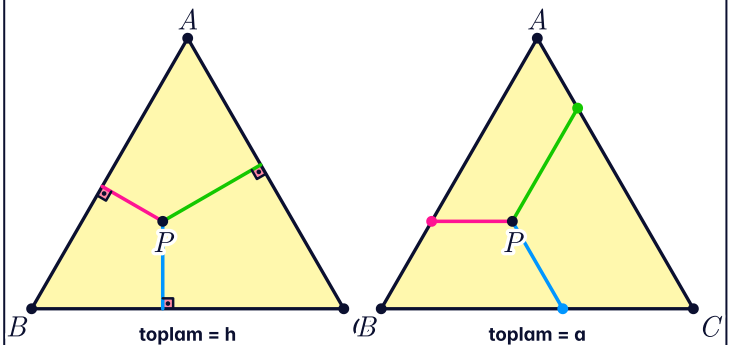


5.6 Eşkenarda İç Nokta

Dikmeler: P 'den kenarlara dikmeler toplamı $= h$

Paraleller: P 'den kenarlara paraleller toplamı $= a$

NEREDEN? Dikmeler (Viviani teoremi): üç küçük üçgenin alanları toplamı $\frac{a \cdot h}{2}$ verir.

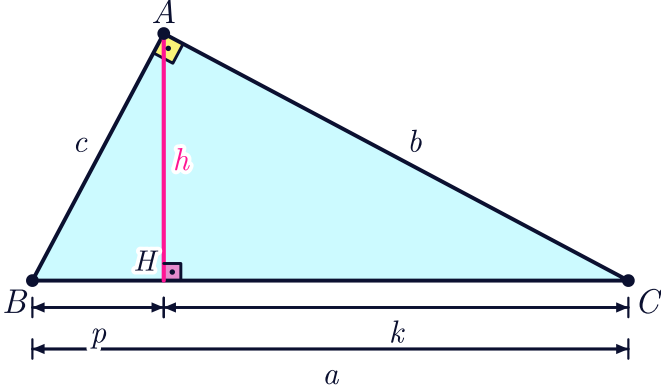


5. DURAK DİK ÜÇGEN: PİSAGOR VE ÖKLİD

5.1 Gösterim

Bu kitap boyunca dik üçgende: dik açı A 'da; hipotenüs $a = |BC|$, dik kenarlar $b = |AC|$, $c = |AB|$; hipotenüse ait yükseklik $h = |AH|$; izdüşümler $p = |BH|$, $k = |HC|$.

$$p + k = a$$

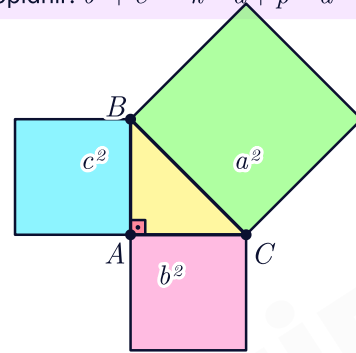


5.2 Pisagor Teoremi

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Dik kenarların kareleri toplamı, hipotenüsün karesine eşittir.

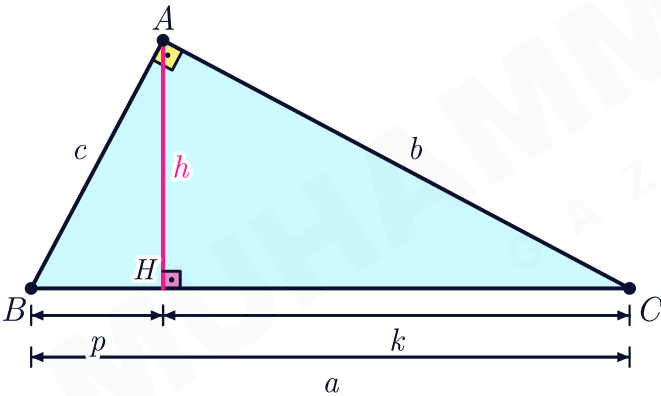
NEREDEN? Hipotenüse yükseklik çizilir; Öklid'in kenar bağıntıları toplanır: $b^2 + c^2 = k \cdot a + p \cdot a = a(p + k) = a^2$.



5.3 Öklid: Yükseklik Bağıntısı

$$h^2 = p \cdot k$$

NEREDEN? $HBA \sim HAC$ benzerliğinden $\frac{h}{p} = \frac{k}{h}$.



5.4 Öklid: Kenar Bağıntıları

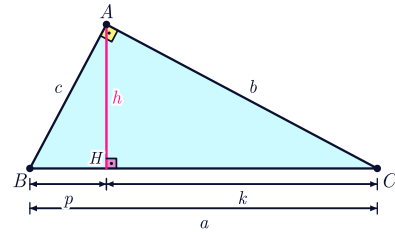
Her dik kenarın karesi, hipotenüs ile **kendi tarafındaki** izdüşümün çarpımıdır.

$$c^2 = p \cdot a$$

$$b^2 = k \cdot a$$

İPUCU a yerine $p + k$ yazılabilir: $c^2 = p(p + k)$

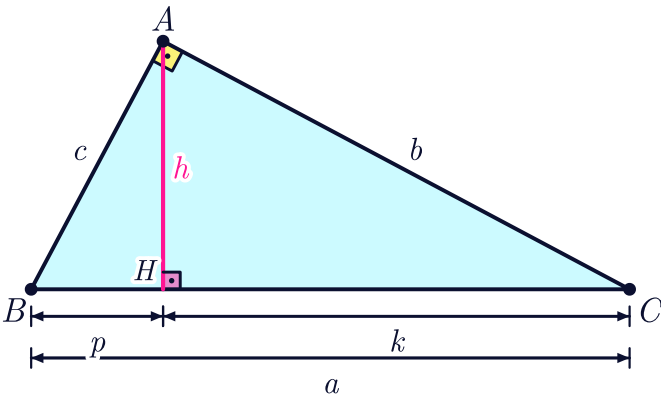
NEREDEN? $HBA \sim ABC$ benzerliğinden $\frac{c}{a} = \frac{p}{c}$.



5.5 Alan Bağıntısı

$$b \cdot c = a \cdot h$$

Alan iki yoldan yazılır: $\frac{b \cdot c}{2} = \frac{a \cdot h}{2}$

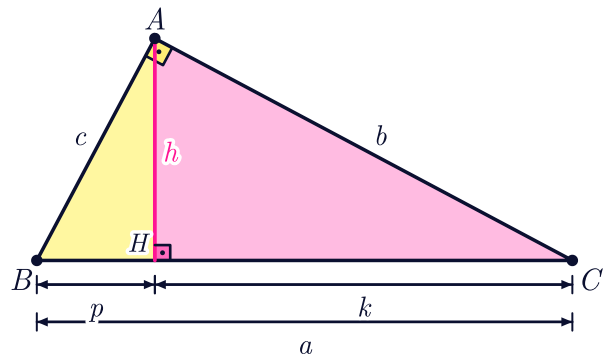


5.6 Üç Benzer Üçgen

Hipotenüse çizilen yükseklik, dik üçgeni kendisine benzer iki üçgene ayırır:

$$ABC \sim HBA \sim HAC$$

NEREDEN? Her biri dik üçgendir ve $\hat{B}$ ya da $\hat{C}$ açısını ortak paylaşıyor (AA).



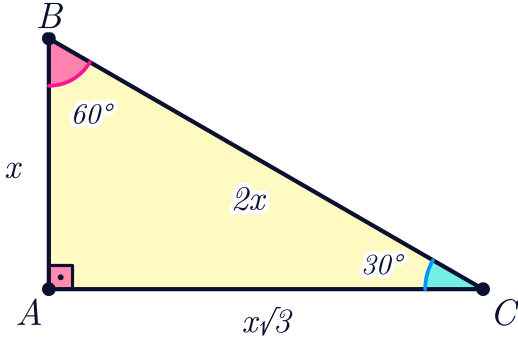
5. DURAK ÖZEL AÇILI DİK ÜÇGENLER

5.1 30° - 60° - 90°

30°'nin karşısı x , 60°'nin karşısı $x\sqrt{3}$, hipotenüs $2x$.

$$x : x\sqrt{3} : 2x$$

NEREDEN? Eşkenar üçgenin yüksekliğiyle ikiye bölünmesinden.

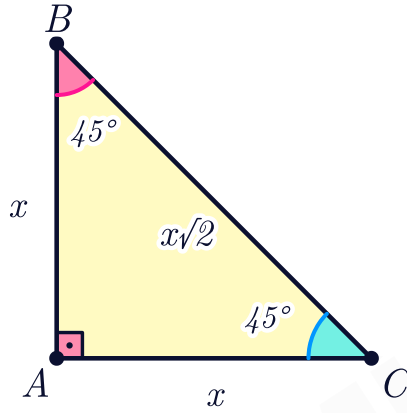


5.2 45° - 45° - 90°

İkizkenar dik üçgen.

$$x : x : x\sqrt{2}$$

NEREDEN? Karenin köşegeniyle ikiye bölünmesinden.

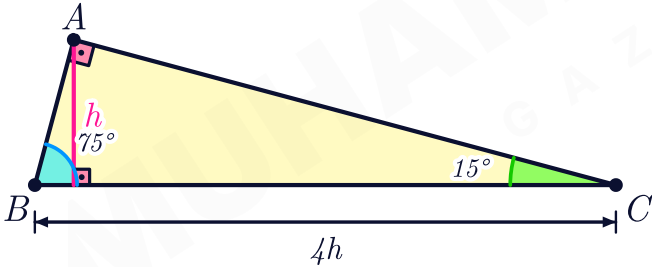


5.3 15° - 75° - 90°

Hipotenüs $4h$ ise hipotenüze ait yükseklik h dir.

$$h = \frac{\text{hipotenüs}}{4}$$

NEREDEN? Hipotenüse kenarortay çizilir: $\frac{a}{2}$ uzunluğunda ve tabanla 30° yapar; $h = \frac{a}{2} \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{4}$.

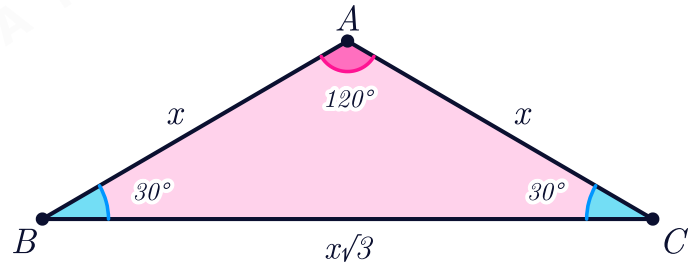


5.4 30° - 30° - 120°

Tepe açısı 120° olan ikizkenar üçgende taban, yan kenarın $\sqrt{3}$ katıdır.

$$x : x : x\sqrt{3}$$

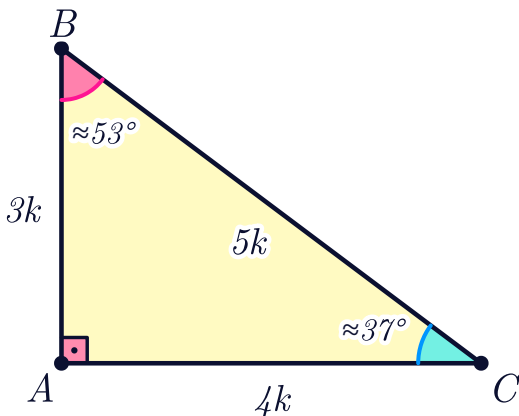
NEREDEN? Tepeden yükseklik indirilince iki tane 30°-60°-90° üçgeni oluşur.



5.5 3 - 4 - 5 Üçgeni

$$3k : 4k : 5k$$

DİKKAT Açılar yaklaşık 37° ve 53°'dir ($\sin 37^\circ \approx 0,6$). Tam değer değildir; soru bu değeri verirse kullanılır.



5.6 Pisagor Üçlülere

Temel üçlü	Katları
3 - 4 - 5	6-8-10, 9-12-15 ...
5 - 12 - 13	10-24-26 ...
8 - 15 - 17	
7 - 24 - 25	
20 - 21 - 29	

ESKİ YUNAN Tüm üçlüler $m > n$ tam sayılarıyla üretilir: $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ (Öklid formülü).
 $m = 2$, $n = 1 \rightarrow 3-4-5$

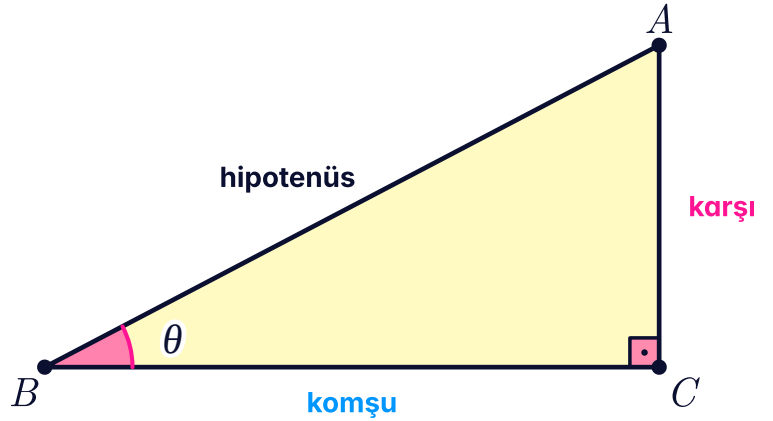
5. DURAK DİK ÜÇGENDE TRİGONOMETRİ VE EK BAĞINTILAR

5.1 Trigonometrik Oranlar

$$\sin\theta = \frac{\text{karşı}}{\text{hipotenüs}} \quad \cos\theta = \frac{\text{komşu}}{\text{hipotenüs}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{karşı}}{\text{komşu}} \quad \cot\theta = \frac{\text{komşu}}{\text{karşı}}$$

ABD Amerikan öğrencilerin ezber kısaltması: **SOH-CAH-TOA** (Sine = Opposite/Hypotenuse, Cosine = Adjacent/Hypotenuse, Tangent = Opposite/Adjacent).



5.2 Özel Açılar Tablosu

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

HİNDİSTAN Sinüs satırını ezberlemenin yolu: $\frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ (0°'den 90°'ye: $\frac{\sqrt{0}}{2} \dots \frac{\sqrt{4}}{2}$). Kosinüs aynı satırın tersidir.

5.3 Temel Özdeşlikler

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

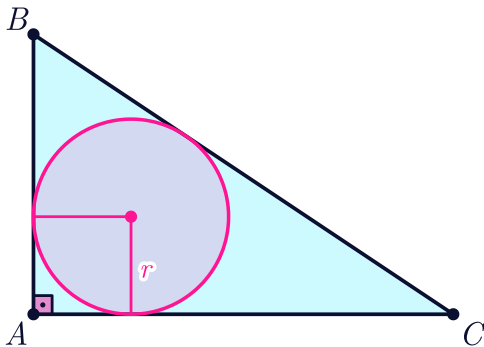
$$\sin x = \cos(90^\circ - x)$$

NEREDEN? Birinci özdeşlik, hipotenüsü 1 olan dik üçgende Pisagor teoremidir.

5.4 Dik Üçgende İç Teğet Çember

$$r = \frac{b + c - a}{2}$$

NEREDEN? Köşelerden çizilen teğet parçaları eşittir; dik köşede teğet parçaları r olur. $b + c = a + 2r$.



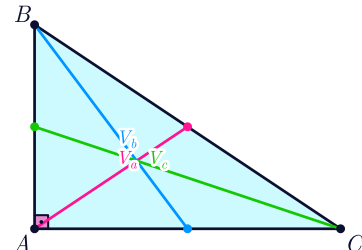
5.5 Dik Üçgende Kenarortaylar

Hipotenüse ait kenarortay hipotenüsün yarısıdır.

$$V_a = \frac{a}{2}$$

$$V_b^2 + V_c^2 = 5 V_a^2$$

NEREDEN? A, hipotenüs çaplı çemberin üzerindedir (çapı gören açı 90°). İkinci bağıntı kenarortay formülünden gelir.

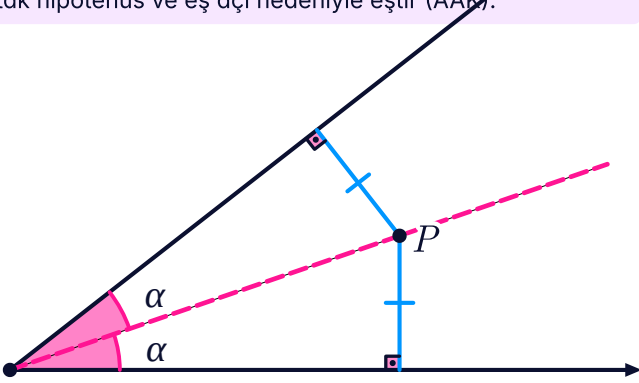


6. DURAK AÇIORTAY

6.1 Açıortay Özelliği

Açıortay üzerindeki her nokta, açının kollarına **eşit uzaklıktadır**; tersi de doğrudur.

NEREDEN? Kollara inilen dikmelerle oluşan iki dik üçgen, ortak hipotenüs ve eş açı nedeniyle eştir (AAK).

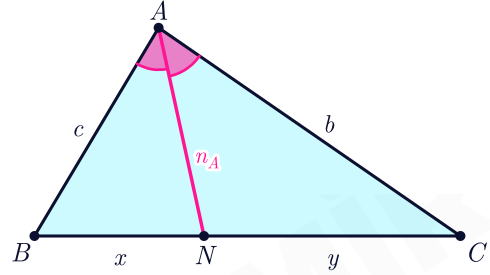


6.2 İç Açıortay Teoremi

$[AN]$ iç açıortay, $x = |BN|$, $y = |NC|$ ise

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$$

NEREDEN? ABN ve ANC 'nin yükseklikleri ortak: alan oranı $\frac{x}{y}$. Alanları $\frac{1}{2}c \cdot n_A \sin \frac{A}{2}$ ve $\frac{1}{2}b \cdot n_A \sin \frac{A}{2}$ olarak da yazılır.

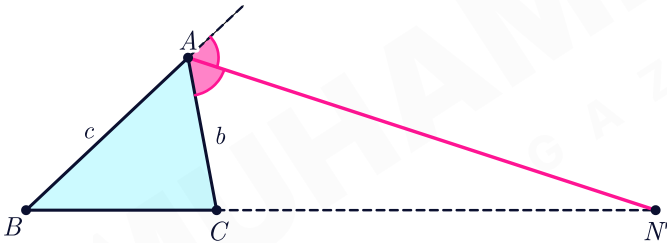


6.3 Dış Açıortay Teoremi

$[AN']$ dış açıortay (N' , BC uzantısında) ise

$$\frac{|NB|}{|N'C|} = \frac{c}{b}$$

NEREDEN? C 'den AN' 'ye paralel çizilir; oluşan ikizkenar üçgen ve temel orantı teoremi kullanılır.



6.4 Açıortay Uzunluğu

İç açıortay (şekil 6.2):

$$n_A^2 = b \cdot c - x \cdot y$$

Dış açıortay (şekil 6.3):

$$|AN'|^2 = |NB| \cdot |N'C| - b \cdot c$$

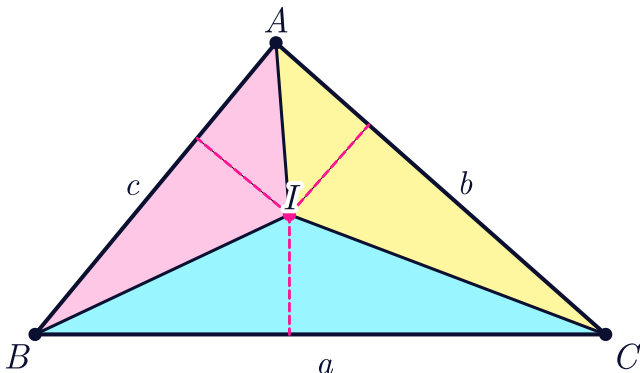
NEREDEN? Stewart teoremi (13. Durak) açıortay oranıyla birlikte uygulanır.

6.5 İç Teğet Merkezi ile Alanlar

I , iç açıortayların kesim noktasıdır. Kenarlara uzaklığı eşit (r) olduğundan

$$A(IBC) : A(IAC) : A(IAB) = a : b : c$$

NEREDEN? Üç üçgenin yükseklikleri de r 'dir; alanlar tabanlarla orantılıdır.



6.6 Hızlı Hatırlatma

- İç açıortay karşı **kenarı**, dış açıortay karşı kenarın **uzantısını** komşu kenarlar oranında böler.
- İç ve dış açıortay her zaman diktir (2. Durak).
- Bir iç ve iki dış açıortay bir noktada kesişir: **dış teğet çemberin merkezi**.

İNGİLTERE İngiliz okullarında açıortay teoremi "angle bisector divides the opposite side in the ratio of the adjacent sides" diye ezberlenir: komşu kenarlar $\rightarrow$ karşı kenarın parçaları.

6. DURAK KENARORTAY VE AĞIRLIK MERKEZİ

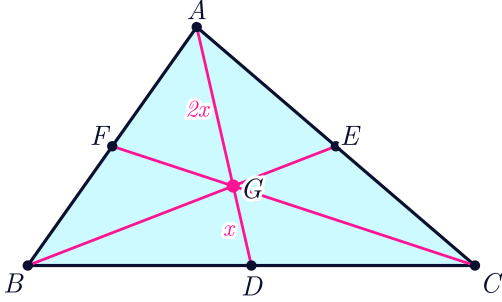
6.1 Ağırlık Merkezi (G)

Üç kenarortay G' 'de kesişir. G , her kenarortayı **köşeden itibaren 2 : 1** böler.

$$|AG| = 2|GD|$$

NEREDEN? $[FE]$ orta taban: $FE \parallel BC$, $|FE| = \frac{|BC|}{2}$.

$GFE \sim GCB$ benzerliği oranı $\frac{1}{2}$ verir.

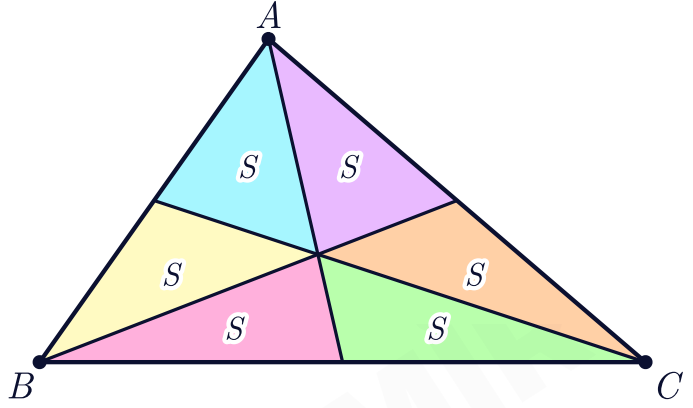


6.2 Altı Eş Alan

Kenarortaylar üçgeni **alanları eşit** altı üçgene ayırır.

$$A(ABC) = 6S$$

NEREDEN? Her kenarortay üçgeni eş alanlı iki parçaya ayırır (tabanlar eş, yükseklik ortak).



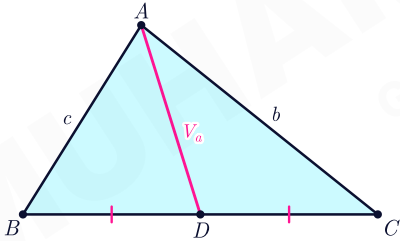
6.3 Kenarortay Uzunluğu

$$V_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

Eşdeğer yazılış (Apollonius):

$$b^2 + c^2 = 2V_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

NEREDEN? Kenarortay iki katına uzatılınca paralelkenar oluşur: köşegenlerin kareleri toplamı, kenarların kareleri toplamının iki katıdır.

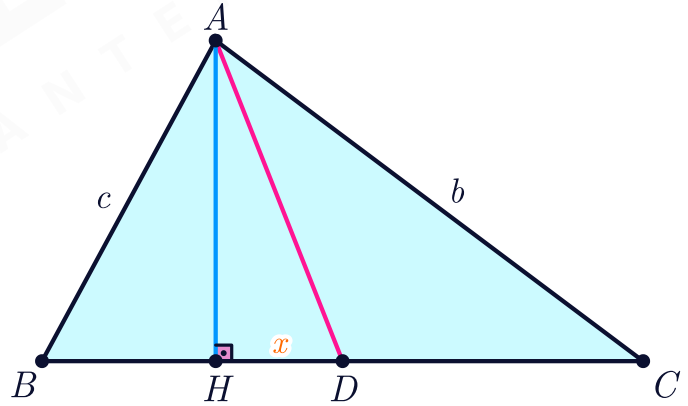


6.4 Kenarortay ile Yükseklik Arası

$[AD]$ kenarortay, $[AH]$ yükseklik, $x = |HD|$ ise

$$2 \cdot a \cdot x = |b^2 - c^2|$$

NEREDEN? ABH ve ACH dik üçgenlerinde Pisagor yazılıp çıkarılır: $b^2 - c^2 = |HC|^2 - |BH|^2$.



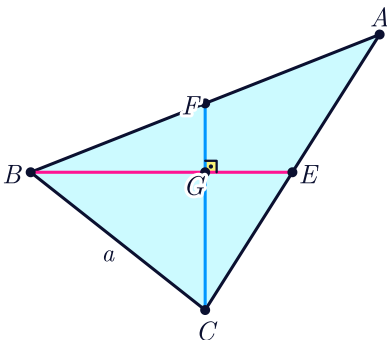
6.5 Dik Kesişen Kenarortaylar

$[BE] \perp [CF]$ ise

$$b^2 + c^2 = 5a^2$$

$$V_a^2 = V_b^2 + V_c^2$$

NEREDEN? G' 'de dik üçgenler oluşur; 2 : 1 oranıyla Pisagor uygulanır.



6.6 Ağırlık Merkezinin Koordinatları

Köşeleri $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ise

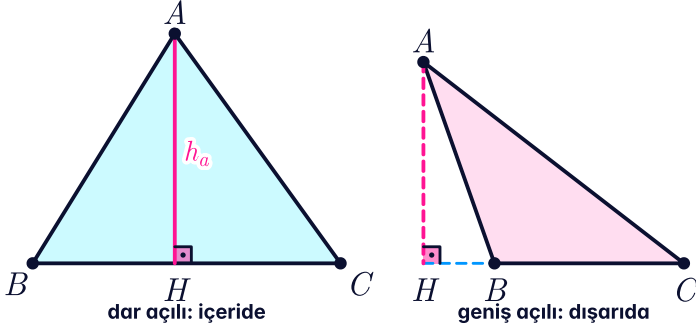
$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

NOT Kartondan kesilmiş bir üçgen, G noktasından parmak ucunda dengede durur; adı buradan gelir.

6. DURAK YÜKSEKLİK, ORTA TABAN VE ORTA DİKME

6.1 Yükseklik

Bir köşeden karşı kenara (ya da uzantısına) indirilen dikmedir. h_a : a kenarına ait yükseklik.



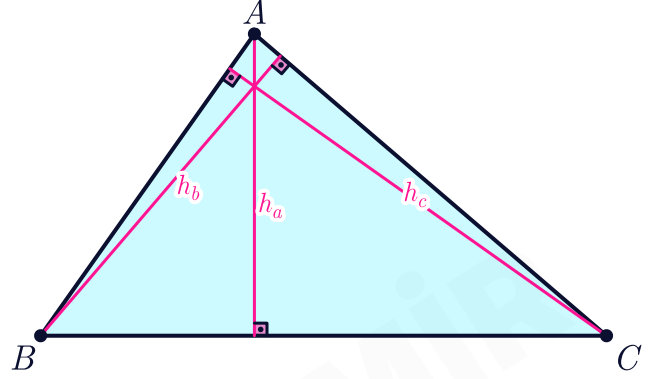
6.2 Yükseklikler ve Kenarlar

Alan her kenar için aynıdır:

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$$

Kısa kenara ait yükseklik daha uzundur.

NEREDEN? Alan = $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$

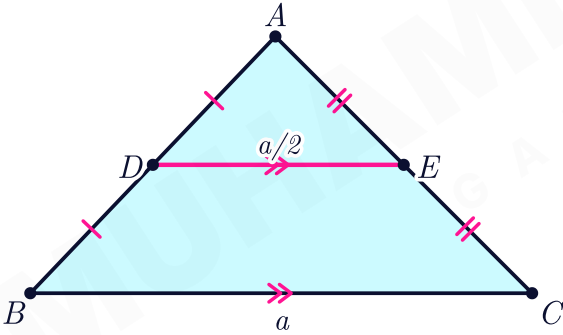


6.3 Orta Taban

İki kenarın orta noktalarını birleştiren doğru parçası, üçüncü kenara **paraleldir** ve onun **yarısıdır**.

$$|DE| = \frac{a}{2}$$

NEREDEN? $ADE \sim ABC$, benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ (KAK).

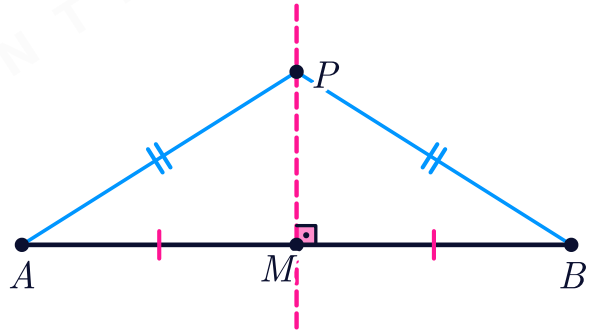


6.4 Orta Dikme

Bir doğru parçasının orta noktasından geçen dik doğrudur. Üzerindeki her nokta uçlara **eşit uzaklıktadır**.

$$|PA| = |PB|$$

NEREDEN? PMA ve PMB üçgenleri KAK ile eşitir.



6.5 Orta Taban ile Yeni Üçgenler

Üç orta taban, üçgeni **dört eş** üçgene ayırır; her biri büyük üçgenin $\frac{1}{4}$ 'ü kadar alanlıdır.

İPUÇU Bir kenarın orta noktası verilmişse öbür kenarın orta noktasını da alıp orta taban çizmeyi dene.

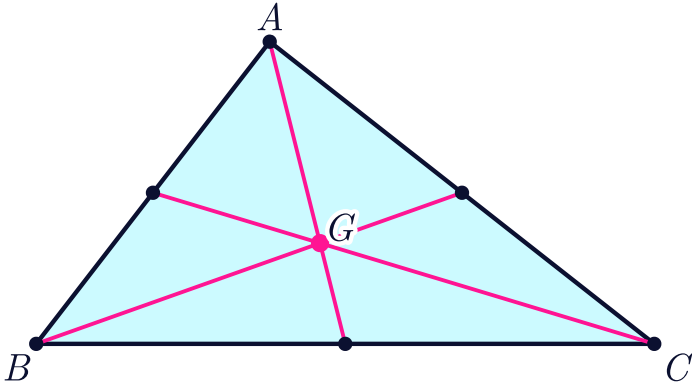
6.6 Dikkat

- Yükseklik ile kenarortayı karıştırma: biri **dik**, öbürü **ortalar**.
- İkizkenar üçgende tepe yüksekliği aynı zamanda kenarortayıdır; çeşitkenarda değildir.
- Dik üçgende dik kenarlar, birbirine ait yüksekliklerdir.

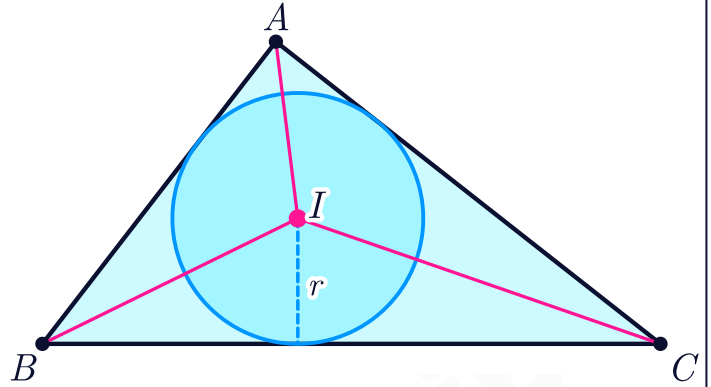
6. DURAK ÜÇGENDE DÖRT MERKEZ

6.1 Ağırlık Merkezi G

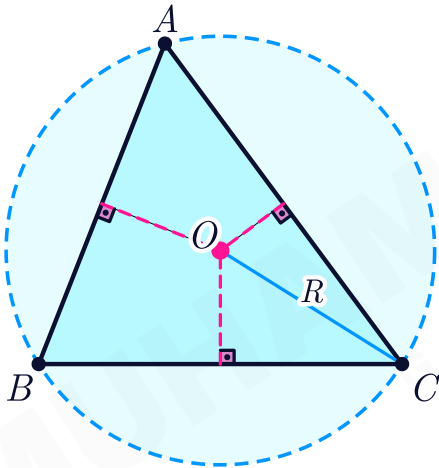
Kenarortayların kesişim noktası. Kenarortayları köşeden itibaren 2 : 1 böler.

6.2 İç Teğet Çember Merkezi I

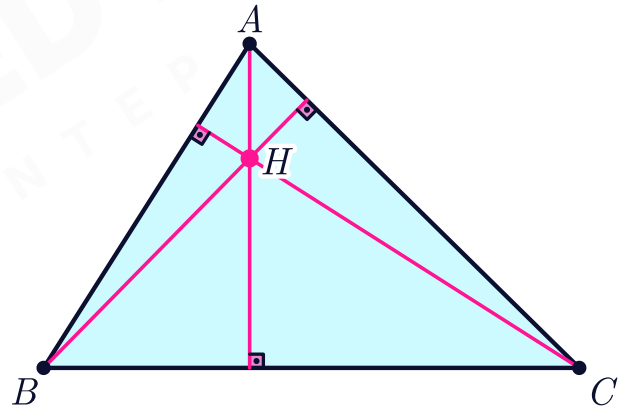
İç açıortayların kesişim noktası. Kenarlara uzaklığı eşittir (r). Her zaman içeridedir.

6.3 Çevrel Çember Merkezi O

Kenar orta dikmelerinin kesişim noktası. Köşelere uzaklığı eşittir (R).

6.4 Diklik Merkezi H

Yüksekliklerin (ya da uzantılarının) kesişim noktası.



6.5 Merkezlerin Yeri

Üçgen	O (çevrel)	H (diklik)
Dar açılı	içeride	içeride
Dik açılı	hipotenüsün orta noktası	dik açının köşesi
Geniş açılı	dışarıda	dışarıda

NOT G ve I her üçgende içeridedir.

6.6 Özel Durumlar

- Eşkenar** üçgende dört merkez çakışır:
 $G = I = O = H$
- İkizkenar** üçgende dört merkez de tepeden inen yükseklik üzerindedir.
- O, G, H her üçgende doğrusaldır (Euler doğrusu, 13. Durak).

ÇİN Çinli öğrencilerin kısaltması: 重心-中线, 内心-角平分线, 外心-中垂线, 垂心-高: her merkez tek bir çizgi türüyle eşleştirilir (ağırlık-kenarortay, iç-açıortay, çevrel-orta dikme, diklik-yükseklik).

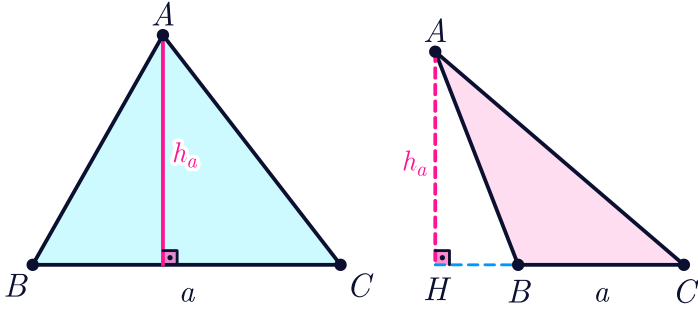
7. DURAK ÜÇGENDE ALAN FORMÜLLERİ

7.1 Taban × Yükseklik

$$A(ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

Geniş açılı üçgende yükseklik, taban uzantısına iner.

NEREDEN? Üçgen, aynı taban ve yükseklikteki paralelkenarın yarısıdır.

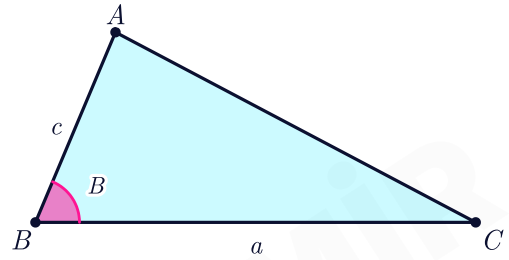


7.2 İki Kenar ve Aradaki Aç

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B$$

NOT $\sin(180^\circ - x) = \sin x$ olduğundan açı geniş olsa da kullanılır. $B = 90^\circ$ ise $\frac{a \cdot c}{2}$ olur.

NEREDEN? c kenarının ucundan a 'ya inen yükseklik $h_a = c \cdot \sin B$ dir.

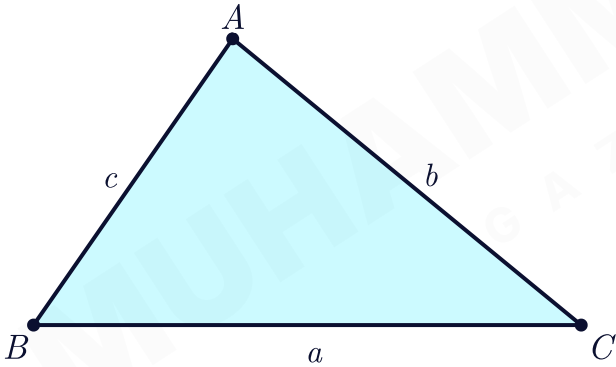


7.3 Heron Formülü (Üç Kenar)

$u = \frac{a+b+c}{2}$ (yarı çevre) olmak üzere

$$A = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

NEREDEN? Kosinüs teoremiyle $\cos B$, oradan $\sin B$ bulunup bir önceki formüle yazılır.

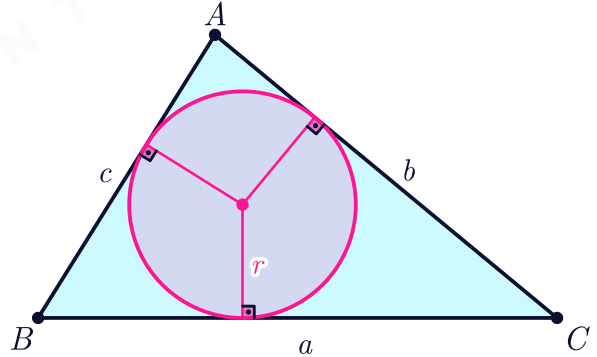


7.4 İç Teğet Çemberle

r : iç teğet çemberin yarıçapı, u : yarı çevre

$$A = u \cdot r$$

NEREDEN? Üçgen, I ile köşeler birleştirilerek yüksekliği r olan üç üçgene ayrılır: $\frac{r(a+b+c)}{2}$.

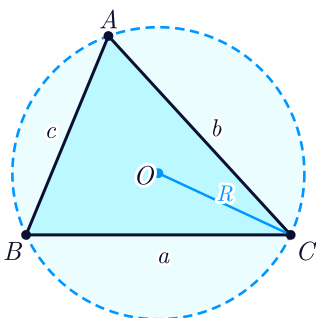


7.5 Çevrel Çemberle

R : çevrel çemberin yarıçapı

$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

NEREDEN? Sinüs teoremi $\sin B = \frac{b}{2R}$ değeri, $\frac{1}{2} ac \sin B$ formülüne yazılır.



7.6 Hangi Formül Ne Zaman?

Verilen	Formül
Taban ve yükseklik	$\frac{a \cdot h_a}{2}$
İki kenar + arasındaki açı	$\frac{1}{2} bc \sin A$
Üç kenar	Heron
İç teğet çember	$u \cdot r$
Çevrel çember	$\frac{abc}{4R}$
Eşkenar (a)	$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

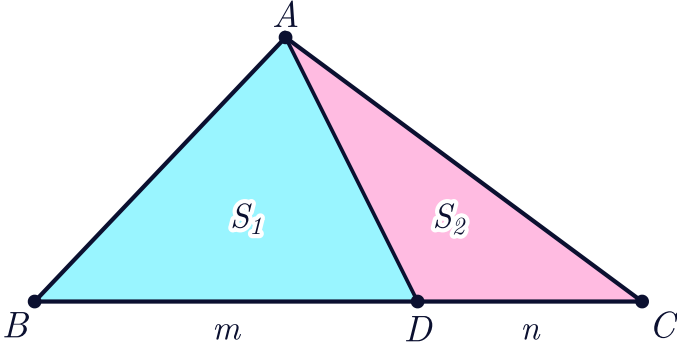
7. DURAK ALAN ORANLARI

7.1 Yükseklikleri Eşit Üçgenler

Tepe noktası ortak ve tabanları aynı doğru üzerinde olan üçgenlerin alanları oranı, **tabanları oranına** eşittir.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$$

NEREDEN? İki üçgenin A 'dan inen yüksekliği aynıdır.

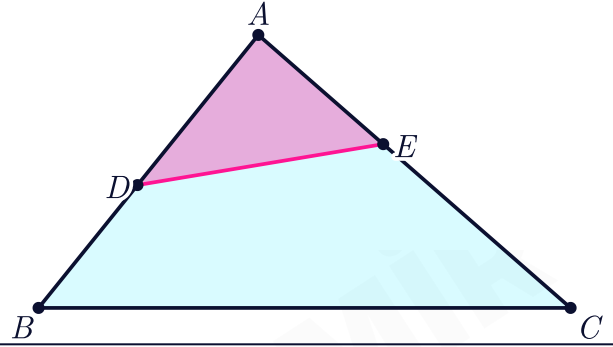


7.2 Ortak Açılı Üçgenler

$D \in [AB]$, $E \in [AC]$ ise

$$\frac{A(ADE)}{A(ABC)} = \frac{|AD| \cdot |AE|}{|AB| \cdot |AC|}$$

NEREDEN? İkisi de $\frac{1}{2} \cdot \text{kenar} \cdot \text{kenar} \cdot \sin A$; $\sin A$ sadeleşir.

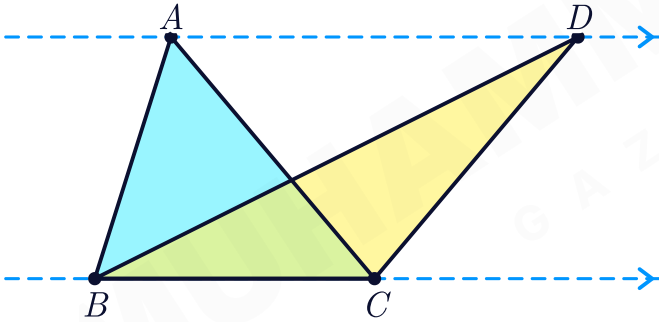


7.3 Aynı Taban, Paralel Tepe

$AD \parallel BC$ ise

$$A(ABC) = A(DBC)$$

NEREDEN? Taban ortak, yükseklik (paraleller arası uzaklık) aynı.

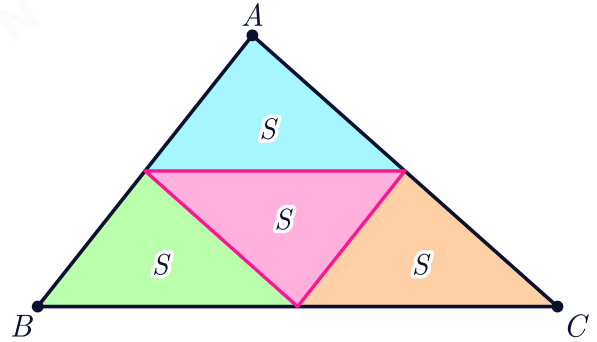


7.4 Orta Tabanlarla Bölünme

Üç orta taban, üçgeni dört **eş** üçgene ayırır.

$$S = \frac{A(ABC)}{4}$$

NEREDEN? Dört üçgenin de kenarları $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ dir (KKK eşliği).

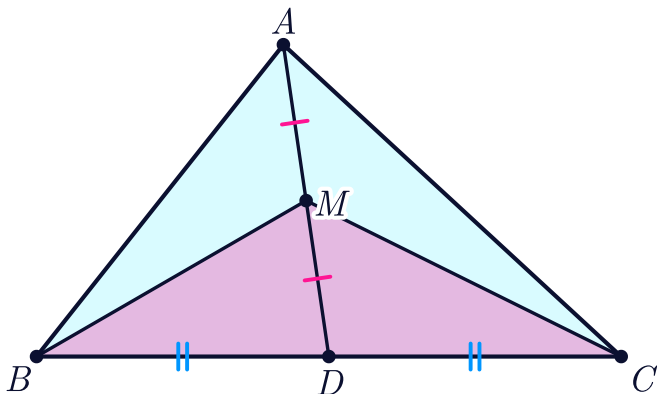


7.5 Kenarortayın Orta Noktası

$[AD]$ kenarortay ve M , $[AD]$ 'nin orta noktası ise

$$A(MBC) = \frac{A(ABC)}{2}$$

NEREDEN? M 'nin BC 'ye uzaklığı, A 'nın uzaklığının yarısıdır.



7.6 Benzer Üçgenlerde Alan

Benzerlik oranı k ise

$$\frac{A_1}{A_2} = k^2$$

İPUCU Alan oranı verilip kenar soruluyorsa

karekök al: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{9}{25}$ ise $k = \frac{3}{5}$

RUSYA Rus okul geometrisinde (Şarığın) alan sorularının çoğu "**eş yükseklik $\rightarrow$ taban oranı**" ve "**ortak açı $\rightarrow$ kenar çarpımları oranı**" ilkeleriyle, hiç uzunluk hesaplamadan çözdürülür.

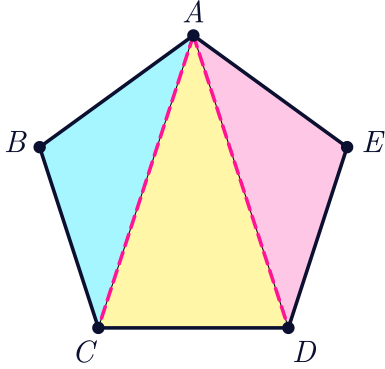
8. DURAK ÇOKGENLER

8.1 İç Açılar Toplamı

Bir köşeden çizilen köşegenler n -geni $(n-2)$ üçgene ayırır.

$$(n-2) \cdot 180^\circ$$

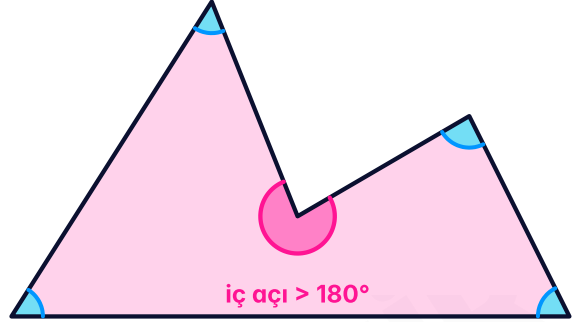
NEREDEN? Her üçgenin iç açıları toplamı 180° ; $(n-2)$ üçgen var.



8.2 İçbükey Çokgenlerde De Geçerli

Bir iç açısı 180° 'den büyük olan (içbükey) çokgenlerde de iç açılar toplamı $(n-2) \cdot 180^\circ$ dir.

NEREDEN? İçbükey çokgen de köşegenlerle $(n-2)$ üçgene ayrılabilir (köşegenler içeride kalacak şekilde seçilir).

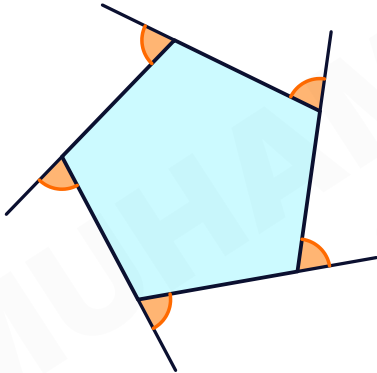


8.3 Dış Açılar Toplamı

Her dışbükey çokgende dış açıların toplamı:

$$360^\circ$$

NEREDEN? Kenarlar boyunca çokgenin çevresinde bir tur dolaşan kişi, toplamda tam bir dönüş (360°) yapar.

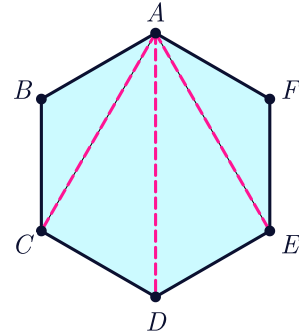


8.4 Köşegen Sayısı

Bir köşeden: $n-3$

$$\text{Toplam: } \frac{n(n-3)}{2}$$

NEREDEN? Bir köşe, kendisine ve iki komşusuna bağlanamaz: $n-3$. n köşe için toplanınca her köşegen iki kez sayılır.

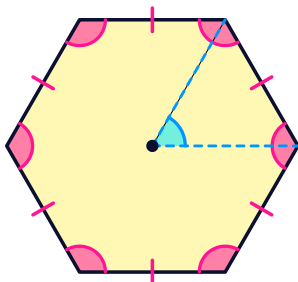


8.5 Düzgün Çokgen

Tüm kenarları ve tüm açıları eş olan çokgen.

$$\text{İç açı} = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

$$\text{Dış açı} = \text{Merkez açı} = \frac{360^\circ}{n}$$



8.6 Örnekler

Çokgen	İç açıların toplamı	Bir iç açı (düzgün)	Köşegen
Beşgen	540°	108°	5
Altıgen	720°	120°	9
Sekizgen	1080°	135°	20
Onikigen	1800°	150°	54

İPUCU Düzgün çokgende n sorulursa önce dış açıyı bul: $n = \frac{360^\circ}{\text{dış açı}}$

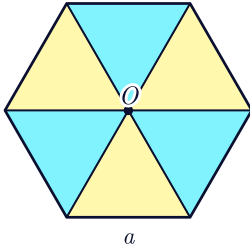
8. DURAK DÜZGÜN ÇOKGENLER

8.1 Düzgün Altıgen

Merkezle birleştirilince **altı eşkenar üçgene** ayrılır. Bir iç açısı 120° .

$$A = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$$

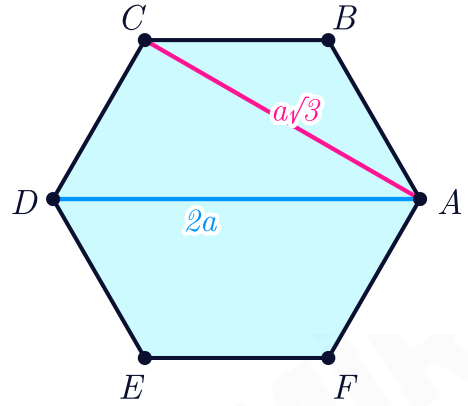
NEREDEN? Merkez açısı $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ olan ikizkenar üçgenler eşkenardır.



8.2 Altıgende Köşegenler

Kısa köşegen $a\sqrt{3}$, uzun köşegen (karşılıklı köşeler) $2a$. Uzun köşegenler merkezden geçer.

NEREDEN? Uzun köşegen iki eşkenar üçgenin kenarıdır; kısa köşegen 120° 'lik ikizkenar üçgenin tabanıdır.

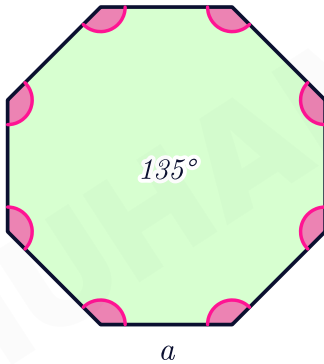


8.3 Düzgün Sekizgen

Bir iç açısı 135° , bir dış açısı 45° .

$$A = 2(1 + \sqrt{2})a^2$$

NEREDEN? Sekizgen, köşelerinden dört ikizkenar dik üçgen kesilmiş bir karedir: karenin kenarı $a + a\sqrt{2}$.



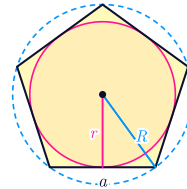
8.4 Genel Alan Formülleri

r : iç teğet, R : çevrel çember yarıçapı

$$A = \frac{n \cdot a \cdot r}{2}$$

$$A = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$

NEREDEN? Çokgen merkezden n eş ikizkenar üçgene ayrılır; her birinin alanı $\frac{a \cdot r}{2}$ ya da $\frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$.



8.5 Düzgün Çokgen Özellikleri

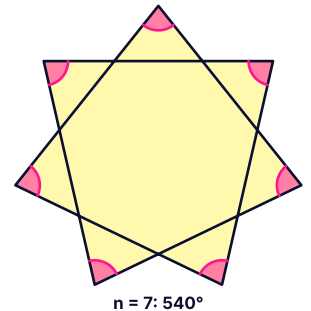
- İç teğet ve çevrel çemberleri vardır; merkezleri ortaktır.
- Kenar sayısı **çift** ise karşılıklı kenarlar paraleldir.
- Kenar sayısı **tek** ise bir köşeden karşı kenara inen dikme hem kenarortay hem açıortaydır.
- Eşit uzunluktaki kırımları gören çevre açılar eşittir.

8.6 Yıldız Çokgenler

Beş köşeli yıldızda uç açılar toplamı 180° . Genel olarak n köşeli yıldızda (her köşeden bir atlayarak çizilen):

$$(n - 4) \cdot 180^\circ$$

NEREDEN? $n = 5$ için $(5 - 4) \cdot 180^\circ = 180^\circ$ (2. Durak).



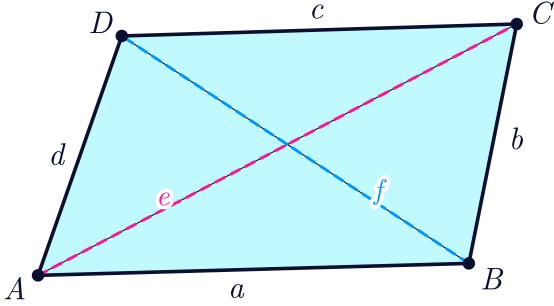
8. DURAK DÖRTGENLER: GENEL ÖZELLİKLER

8.1 Gösterim

$ABCD$ dörtgeninde bu kitap boyunca: $a = |AB|$,
 $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$; köşegenler $e = |AC|$,
 $f = |BD|$.

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 360^\circ$$

NEREDEN? Bir köşegen dörtgeni iki üçgene ayırır: $2 \cdot 180^\circ$.

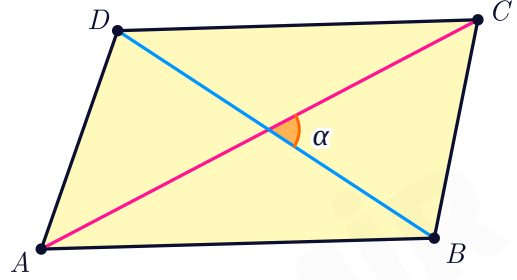


8.2 Köşegenlerle Alan

Köşegenler arasındaki açı α ise

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \sin \alpha$$

NEREDEN? Köşegenlerin oluşturduğu dört üçgenin alanları ($\frac{1}{2} \cdot \text{parça} \cdot \text{parça} \cdot \sin \alpha$) toplanır.

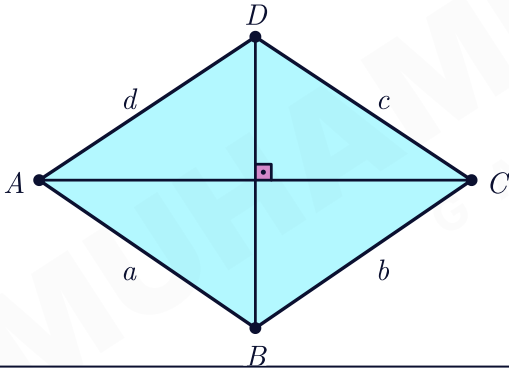


8.3 Köşegenleri Dik Dörtgen

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

$$A = \frac{e \cdot f}{2}$$

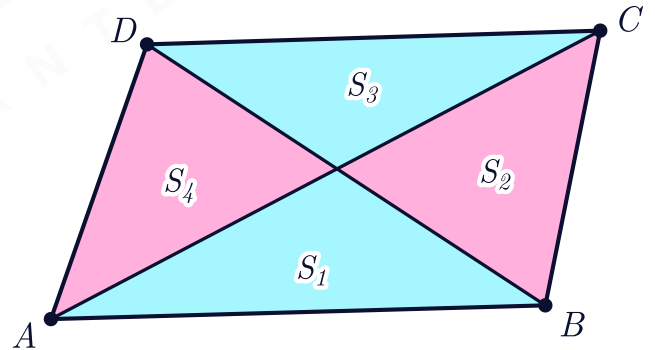
NEREDEN? Kesim noktasında dört dik üçgen oluşur; karşılıklı kenarların kareleri aynı dört parçanın karelerinin toplamıdır.



8.4 Köşegenlerle Ayrılan Alanlar

$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

NEREDEN? Komşu üçgenlerin yükseklikleri ortak: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$
 (ikisi de aynı köşegen parçalarının oranı).

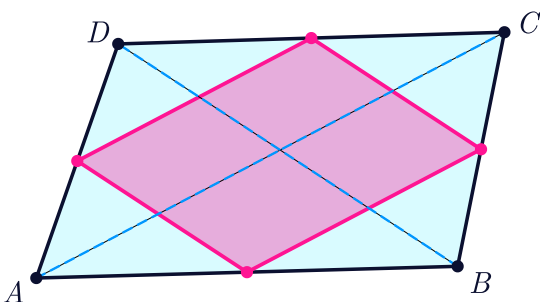


8.5 Varignon Paralelkenarı

Kenar orta noktaları birleştirilince **paralelkenar** oluşur.

- Alanı, dörtgenin alanının yarısıdır.
- Çevresi $e + f$ dir.
- $e \perp f \rightarrow$ dikdörtgen; $e = f \rightarrow$ eşkenar dörtgen.

NEREDEN? Her kenarı bir orta tabandır: köşegene paralel ve onun yarısı.

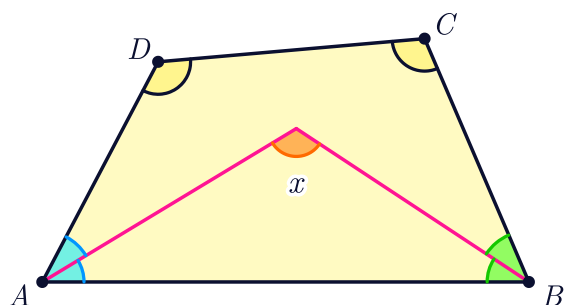


8.6 Komşu İki Açıortay

$\hat{A}$ ve $\hat{B}$ açıortayları arasındaki açı

$$x = \frac{m(\hat{C}) + m(\hat{D})}{2}$$

NEREDEN? $x = 180^\circ - \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$ ve $\hat{A} + \hat{B} = 360^\circ - \hat{C} - \hat{D}$.



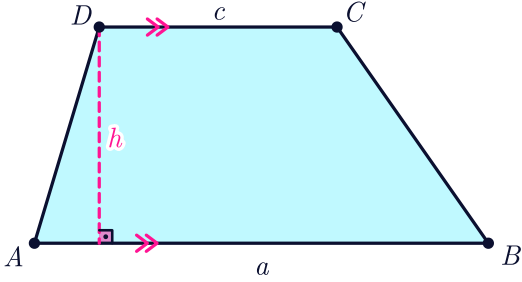
8. DURAK YAMUK

8.1 Yamuk ve Alanı

En az bir çift karşılıklı kenarı paralel dörtgen. $AB \parallel DC$, alt taban a , üst taban c .

$$A = \frac{(a+c) \cdot h}{2}$$

NEREDEN? Bir köşegen yamuğu tabanları a ve c , yükseklikleri h olan iki üçgene ayırır.



8.2 Orta Taban ve Köşegenler

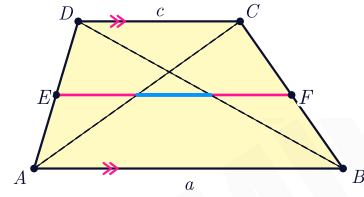
Yan kenarların orta noktaları E, F ise

$$|EF| = \frac{a+c}{2}$$

Mavi parça (köşegenlerin orta noktaları arası):

$$\frac{a-c}{2}$$

NEREDEN? $[EF]$, ABD ve BDC üçgenlerinde iki orta tabanın toplamıdır.



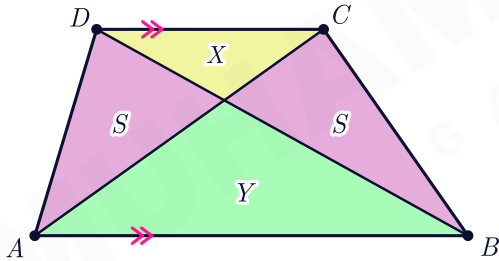
8.3 Köşegenlerle Ayrılan Alanlar

Yan üçgenlerin alanları eşittir.

$$S^2 = X \cdot Y$$

$$A = (\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2$$

NEREDEN? ABD ve ABC 'nin alanları eşit (aynı taban, aynı yükseklik); ortak parça çıkarılınca yan üçgenler eşit kalır. İkinci eşitlik $S_1 S_3 = S_2 S_4$ 'ten.

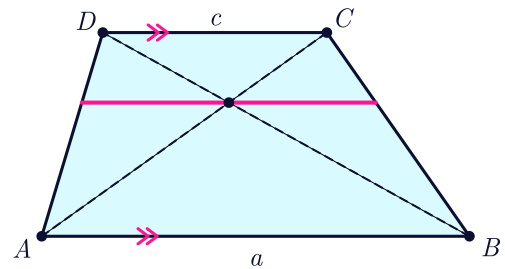


8.4 Köşegen Kesiminden Geçen Paralel

Köşegenlerin kesim noktasından tabanlara paralel çizilen parça:

$$\frac{2ac}{a+c}$$

NEREDEN? Kelebek benzerliği oranı $\frac{c}{a}$ ile iki temel orantı yazılır (harmonik ortalama).

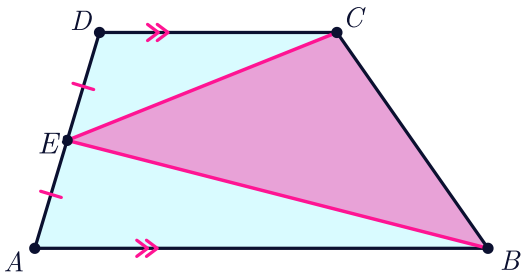


8.5 Yan Kenarın Orta Noktası

E , $[AD]$ 'nin orta noktası ise

$$A(EBC) = \frac{A(ABCD)}{2}$$

NEREDEN? EBC 'nin alanı, E 'den geçen orta tabanla $\frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot h$ olur.

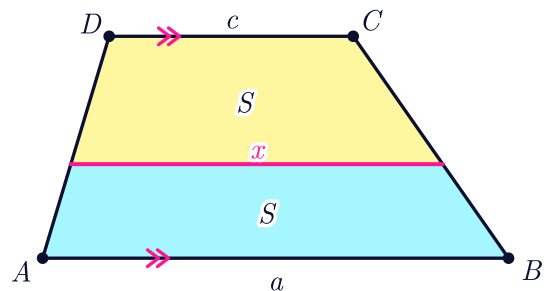


8.6 Alanı Eşit Bölen Paralel

Tabanlara paralel ve yamuğu eş alanlı iki parçaya ayıran doğru parçası:

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}$$

NEREDEN? Yan kenarlar uzatılıp tepe üçgeni oluşturulur; alanlar c^2, x^2, a^2 ile orantılıdır.

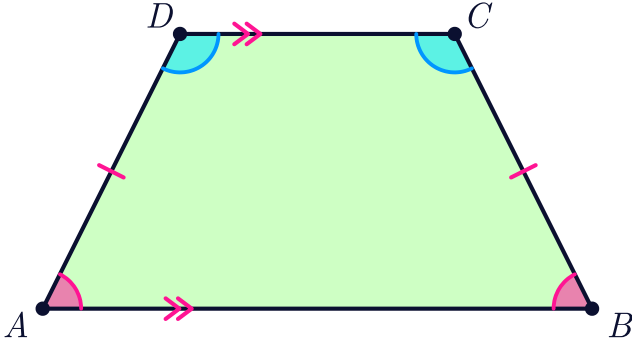


8. DURAK İKİZKENAR YAMUK VE DİK YAMUK

8.1 İkizkenar Yamuk

Yan kenarları eşit yamuk. Taban açıları eşittir; köşegenleri eşittir. Bir simetri eksenidir.

NEREDEN? Üst köşelerden inen dikmelerle oluşan iki dik üçgen eşittir (HK).

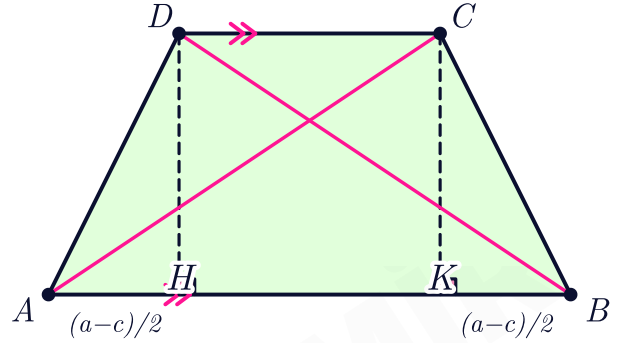


8.2 Dikme Ayakları

$[DH] \perp [AB]$, $[CK] \perp [AB]$ ise

$$|AH| = |KB| = \frac{a-c}{2}$$

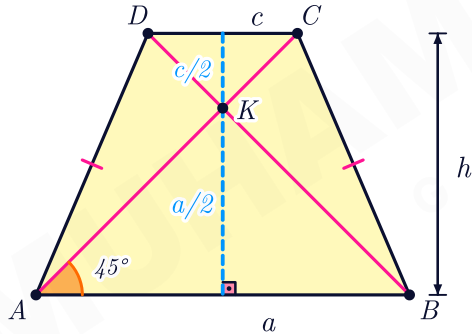
NEREDEN? $|HK| = c$ ve iki uç parça eşittir.



8.3 Köşegenleri Dik İkizkenar Yamuk

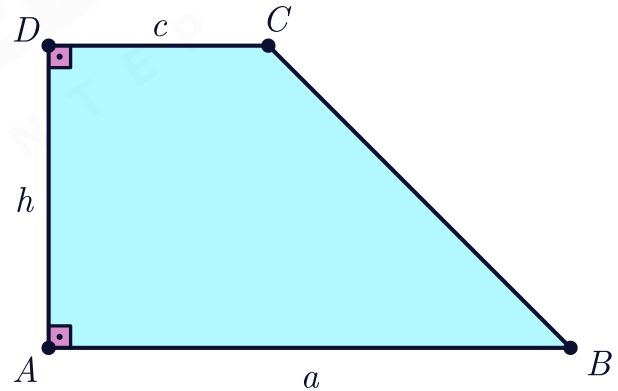
$$h = \frac{a+c}{2} \quad A = h^2$$

NEREDEN? KAB , KCD ikizkenar dik üçgen; K 'den inen dikmeler hipotenüslerin yarısı: $a/2$, $c/2$. Toplamları h ; alan $= \frac{a+c}{2} \cdot h = h^2$.



8.4 Dik Yamuk

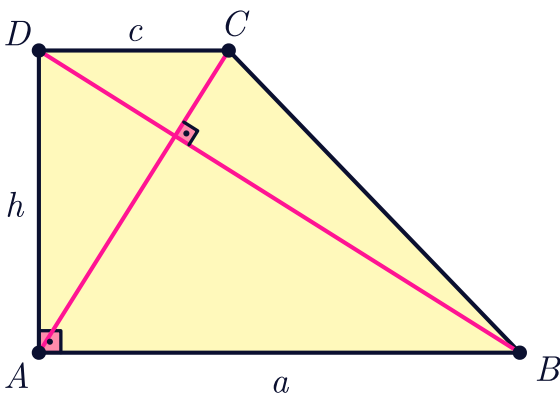
Yan kenarlarından biri tabanlara dik olan yamuk. Bu dik kenar, yamuğun yüksekliğidir.



8.5 Köşegenleri Dik Dik Yamuk

$$h^2 = a \cdot c$$

NEREDEN? DAB ve CDA dik üçgenleri benzerdir: $\frac{h}{a} = \frac{c}{h}$.



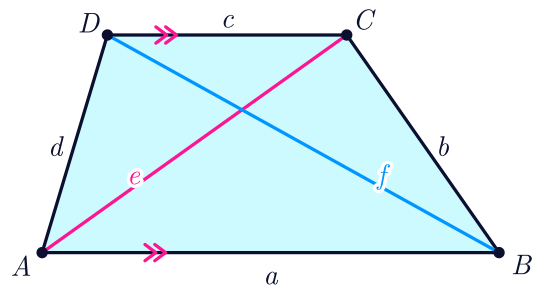
8.6 Yamukta Köşegen Bağlantısı

Her yamukta:

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$$

İPUCU İkizkenar yamukta $e = f$ ve $b = d$ olduğundan $e^2 = b^2 + ac$.

NEREDEN? Üst köşelerden dikmeler indirilip iki kez Pisagor yazılır.



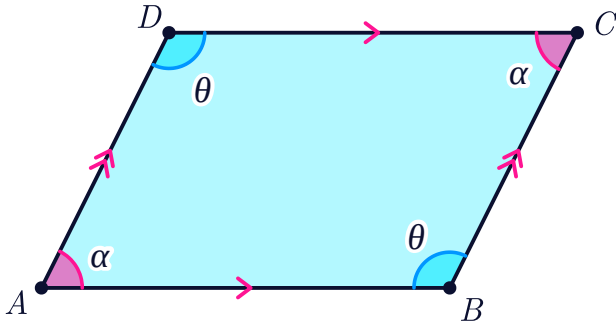
8. DURAK PARALELKENAR

8.1 Paralelkenar

Karşılıklı kenarları paralel dörtgen. Karşılıklı kenarlar eşit, karşılıklı açılar eşit, komşu açılar bütündür.

$$\alpha + \theta = 180^\circ$$

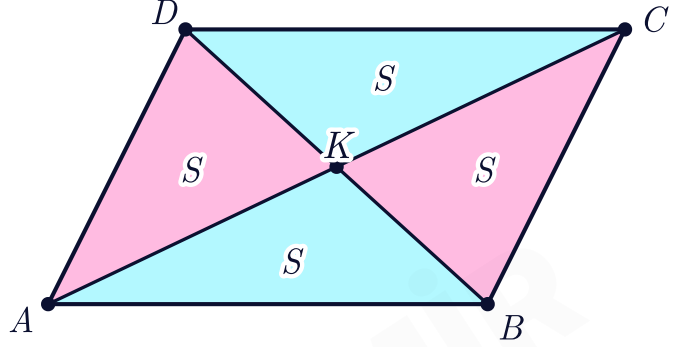
NEREDEN? Komşu açılar, paraleller arasında karşı durumlu açılardır (U kuralı).



8.2 Köşegenler

Köşegenler birbirini **ortalar** ve alanı **dört eş** parçaya böler. K aynı zamanda simetri merkezidir.

NEREDEN? KAB ve KCD üçgenleri AKA ile eştir; kenarortay her üçgeni eş alanlı ikiye ayırır.



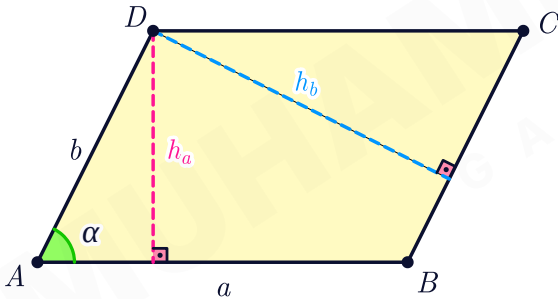
8.3 Alan

$$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

$$A = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

NEREDEN? Bir köşegen paralelkenarı iki eş üçgene ayırır:

$$2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin \alpha.$$



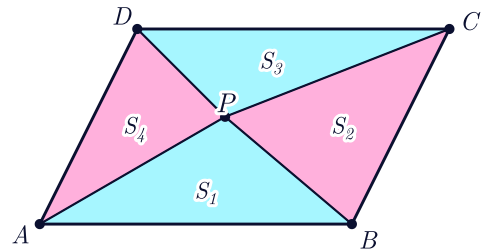
8.4 İç Nokta

P paralelkenarın içinde ise karşılıklı üçgenlerin alanları toplamı eşittir:

$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = \frac{A}{2}$$

NEREDEN?

$$S_1 + S_3 = \frac{a \cdot h_1}{2} + \frac{a \cdot h_2}{2} = \frac{a(h_1 + h_2)}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

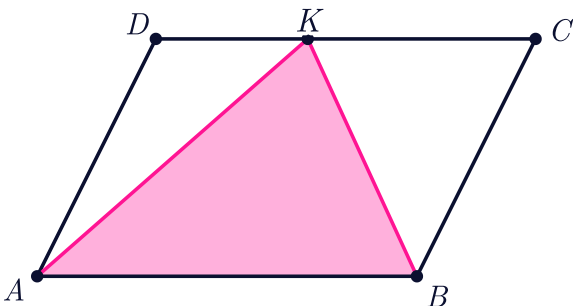


8.5 Kenardaki Nokta

K , $[DC]$ üzerinde ise

$$A(KAB) = \frac{A(ABCD)}{2}$$

NEREDEN? Taban a , yükseklik h_a : $\frac{a \cdot h_a}{2}$.

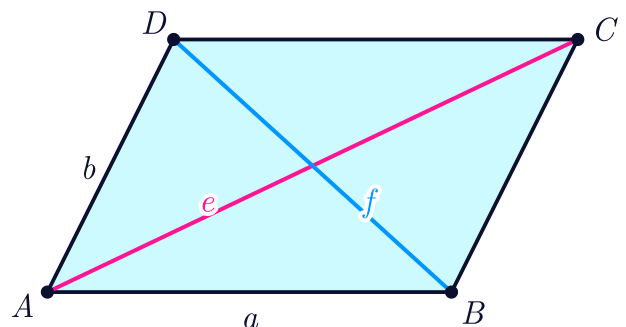


8.6 Köşegen Bağlantısı

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$\zeta = 2(a + b)$$

NEREDEN? İki üçgende kosinüs teoremi yazılır; $\cos \alpha$ ve $\cos \theta = -\cos \alpha$ terimleri birbirini götürür.

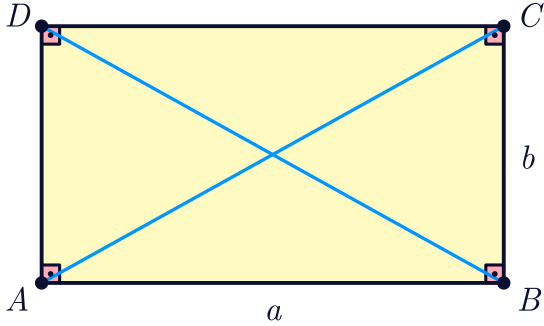


8. DURAK DİKDÖRTGEN, EŞKENAR DÖRTGEN, KARE**8.1 Dikdörtgen**

Tüm açıları 90° olan paralelkenar. Köşegenleri **eşit** ve birbirini ortalar.

$$A = a \cdot b$$

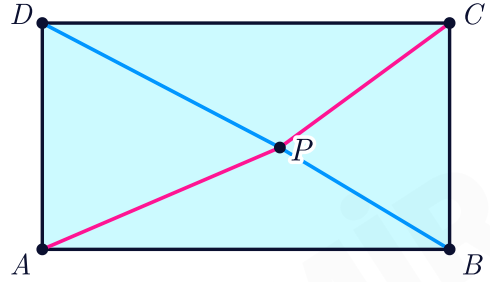
$$e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**8.2 İngiliz Bayrağı Teoremi**

Dikdörtgenin içinde ya da dışında herhangi bir P noktası için

$$|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$$

NEREDEN? P 'den kenarlara dikmeler indirilir; her kare, iki dik parçanın kareleri toplamıdır ve iki tarafta aynı dört parça yer alır.

**8.3 Eşkenar Dörtgen**

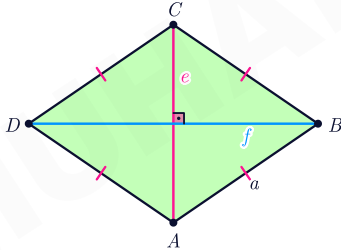
Tüm kenarları eşit paralelkenar. Köşegenleri **dik**, birbirini ortalar ve **açıortaydır**. $e = |AC|$, $f = |BD|$.

$$A = \frac{e \cdot f}{2} = a \cdot h$$

$$e^2 + f^2 = 4a^2$$

NEREDEN? Köşegenler dört eş dik üçgen oluşturur:

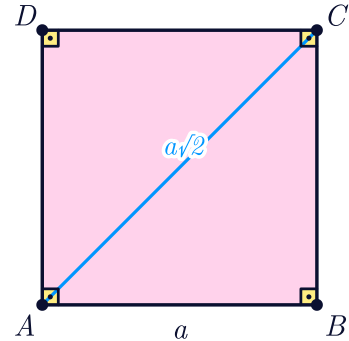
$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = a^2.$$

**8.4 Kare**

Hem dikdörtgen hem eşkenar dörtgendir: köşegenler eşit, dik, açıortay ve birbirini ortalar.

$$A = a^2 = \frac{e^2}{2}$$

$$e = a\sqrt{2}$$

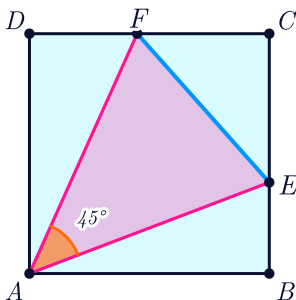
**8.5 Karede Yarım Açı**

$E \in [BC]$, $F \in [CD]$ ve $m(\widehat{EAF}) = 45^\circ$ ise

$$|EF| = |BE| + |DF|$$

NEREDEN? ABE üçgeni A etrafında 90° döndürülüp ADF 'nin yanına getirilir; oluşan üçgen AEF ile eştir (KAK).

ÇİN Çin'de bu kalıbın adı 半角模型 (yarım açı modeli): "90°'lik açının içinde 45° varsa döndür" diye öğretilir.

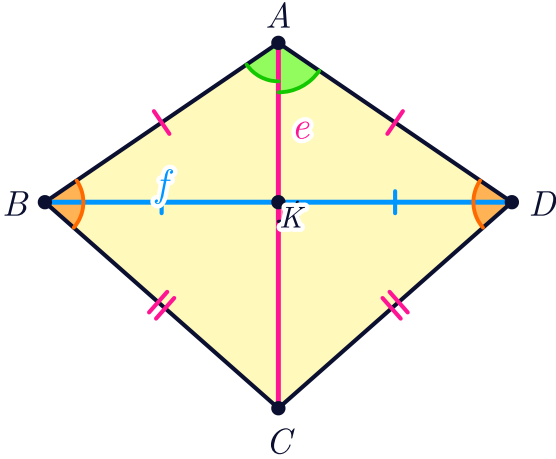
**8.6 Aile Ağacı**

Köşegenler...	Paralel-kenar	Dikdört-gen	Eşkenar dörtgen	Kare
birbirini ortalar	✓	✓	✓	✓
eşit	–	✓	–	✓
dik	–	–	✓	✓
açıortay	–	–	✓	✓

8. DURAK DELTOİD

8.1 Tanım ve Gösterim

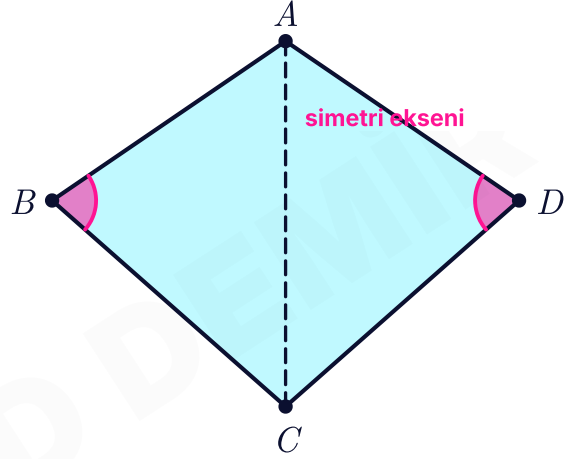
Tabanı ortak iki ikizkenar üçgenden oluşan dörtgen:
 $|AB| = |AD|$ ve $|CB| = |CD|$.
 Bu kitapta $e = |AC|$ simetri eksenindeki köşegen,
 $f = |BD|$ öbür köşegendir.



8.2 Köşegen Özellikleri

- $[AC] \perp [BD]$
- $[AC]$, $[BD]$ 'yi ortalar: $|BK| = |KD|$
- $[AC]$, $\widehat{A}$ ve $\widehat{C}$ açılarının açıortayıdır.

NEREDEN? ABC ve ADC üçgenleri KKK ile eşittir; A ve C , $[BD]$ 'nin orta dikmesi üzerindedir.

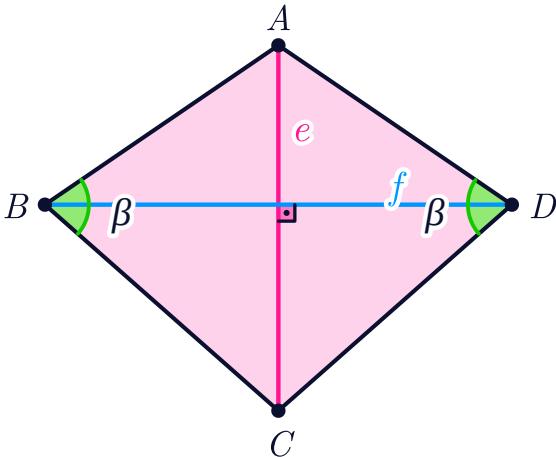


8.3 Açılar ve Alan

$$m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$$

$$A = \frac{e \cdot f}{2}$$

NEREDEN? Köşegenleri dik her dörtgende alan $\frac{e \cdot f}{2}$ dir.



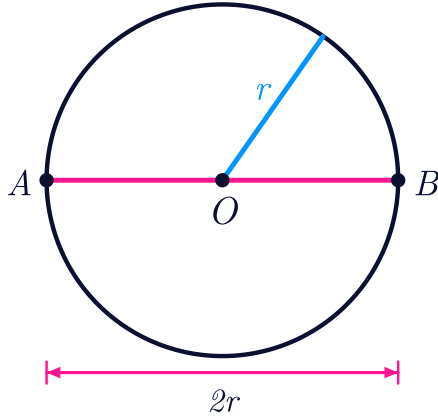
8.4 Dikkat

- Deltoidde $\widehat{A}$ ile $\widehat{C}$ genel olarak eşit **değildir**; eşit olan $\widehat{B}$ ile $\widehat{D}$ 'dir.
- Eşkenar dörtgen, dört kenarı eşit özel bir deltoiddir.
- Deltoidin her zaman iç teğet çemberi vardır (karşı kenar toplamaları eşit).

9. DURAK ÇEMBERDE TEMEL KAVRAMLAR VE GÖSTERİM

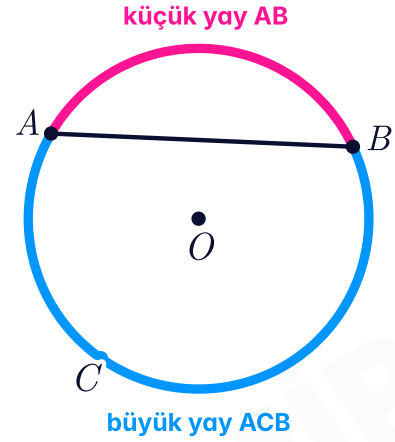
9.1 Çember, Merkez, Yarıçap, Çap

Bir O noktasına eşit uzaklıktaki noktaların kümesi **çemberdir**. Bu kitapta: yarıçap r , çap $2r$. Çap, merkezden geçen kırıştir ve **en uzun kırıştir**.



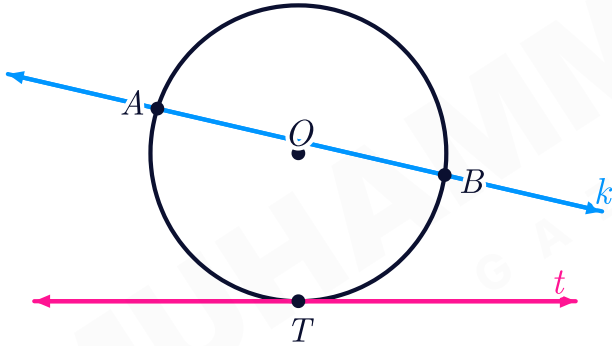
9.2 Kiriş ve Yay

Kiriş: iki ucu çember üzerinde olan doğru parçası. **Yay:** çemberin iki nokta arasındaki parçası; küçük yay $\widehat{AB}$, ölçüsü $m(\widehat{AB})$.



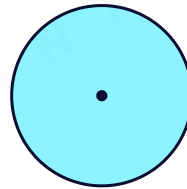
9.3 Teğet ve Kesen

Teğet (t): çemberle tek ortak noktası olan doğru; T değme noktası. **Kesen (k):** çemberi iki noktada kesen doğru.

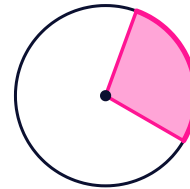


9.4 Daire, Dilim, Parça

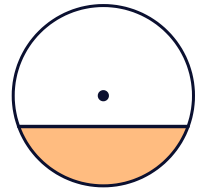
Çember ve iç bölgesi **daire**dir. İki yarıçap ile yayın sınırladığı bölge **daire dilimi**, bir kırış ile yayın sınırladığı bölge **daire parçası**dır.



Daire



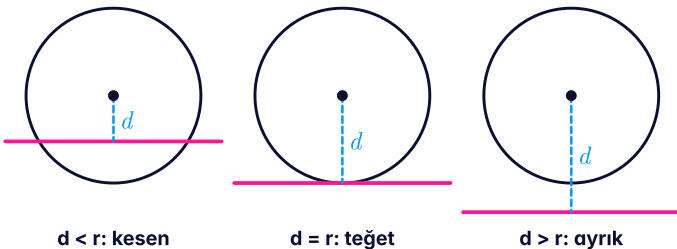
Daire dilimi



Daire parçası

9.5 Doğru ile Çemberin Konumu

Merkezin doğruya uzaklığı d olsun:

 $d < r$: kesen $d = r$: teğet $d > r$: ayrık

9.6 Kitap Boyunca Harfler

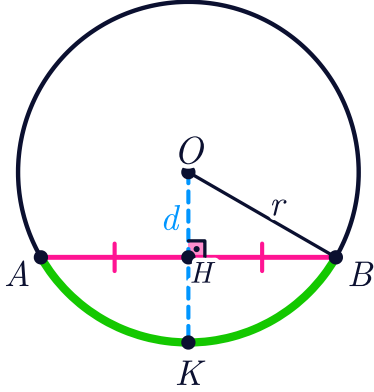
Harf	Anlamı
O, r	merkez, yarıçap
$2r$	çap
d	merkezin bir doğruya / kırışe uzaklığı
$ O_1 O_2 = d$	iki çemberin merkezleri arası uzaklık
T	teğetin değme noktası

9. DURAK KIRIŞIN ÖZELLİKLERİ

9.1 Merkezden Kirişe Dikme

Merkezden kirişe inen dikme, kirişi ve kirişin gördüğü yayı **tam ortadan** böler: $|AH| = |HB|$, $m(\widehat{AK}) = m(\widehat{KB})$

NEREDEN? $OA = OB = r$ olduğundan OAB ikizkenardır; tepe yüksekliği tabanı ortalar.

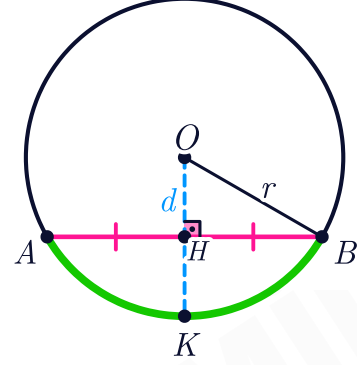


9.2 Kiriş Uzunluğu

Merkezin kirişe uzaklığı d ise (OHB dik üçgeni):

$$|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

İPUCU Kiriş sorularında ilk iş: merkezden dikme in, $r-d$ yarım kiriş dik üçgenini kur.

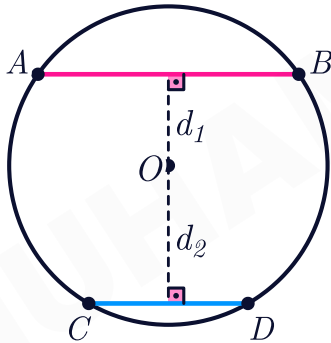


9.3 Merkeze Uzaklık ve Kiriş Boyu

Merkeze **eşit uzaklıktaki** kirişler eşittir. Merkeze **daha yakın** kiriş daha uzundur.

$$d_1 < d_2 \Leftrightarrow |AB| > |CD|$$

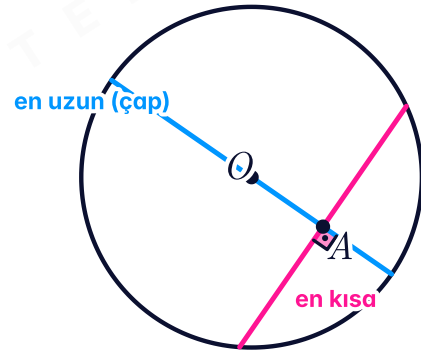
NEREDEN? $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$: d küçüldükçe kök büyür.



9.4 Bir Noktadan Geçen Kirişler

Çemberin içindeki bir A noktasından geçen kirişlerden **en uzununu çaptır**; **en kısası**, bu çapa A 'da dik olan kiriştir.

NEREDEN? A 'dan geçen kirişin merkeze uzaklığı en fazla $|OA|$ olabilir; bu durumda kiriş OA 'ya diktir.

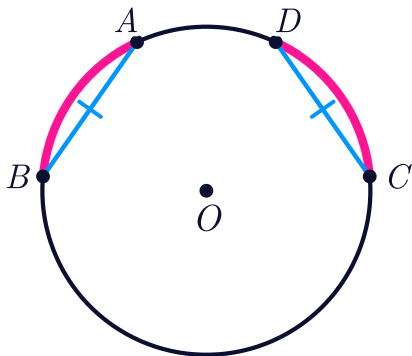


9.5 Eş Kiriş – Eş Yay

Eş kirişler eş yaylar görür; tersi de doğrudur.

$$|AB| = |CD| \Leftrightarrow m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$$

NEREDEN? OAB ve OCD üçgenleri KKK ile eşittir; merkez açıları eşittir.

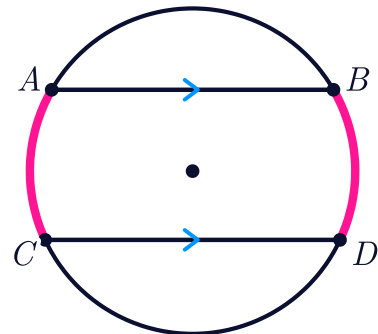


9.6 Paralel Kirişler

Paralel iki kiriş arasında kalan yaylar eşittir.

$$AB \parallel CD \Rightarrow m(\widehat{AC}) = m(\widehat{BD})$$

NEREDEN? $[AD]$ çizilirse iç ters açılar $(\widehat{BAD} = \widehat{ADC})$ eşit çevre açılarıdır; gördükleri yaylar eşittir.



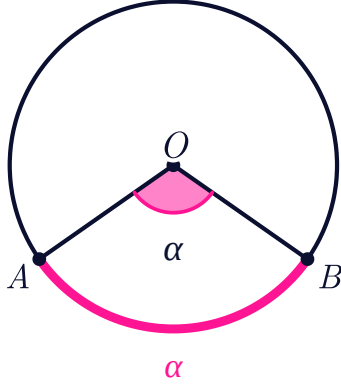
9. DURAK ÇEMBERDE AÇILAR (1): MERKEZ, ÇEVRE, TEĞET-KİRİŞ

9.1 Merkez Açısı

Köşesi merkezde olan açı. Ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.

$$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AB}) = \alpha$$

NEREDEN? Yay ölçüsü, merkez açıyla tanımlanır.

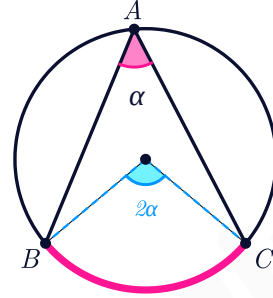


9.2 Çevre Açısı

Köşesi çember üzerinde, kolları kiriş olan açı. Ölçüsü, gördüğü yayın yarısıdır.

$$m(\widehat{BAC}) = \frac{m(\widehat{BC})}{2}$$

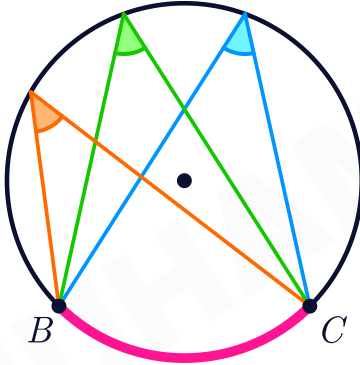
NEREDEN? [AO] çapı çizilir; oluşan ikizkenar üçgenlerde dış açı kuralı merkez açının iki katı olduğunu verir.



9.3 Aynı Yayı Gören Çevre Açılar

Aynı yayı gören bütün çevre açıları eşittir.

NEREDEN? Hepsi aynı yayın yarısıdır.

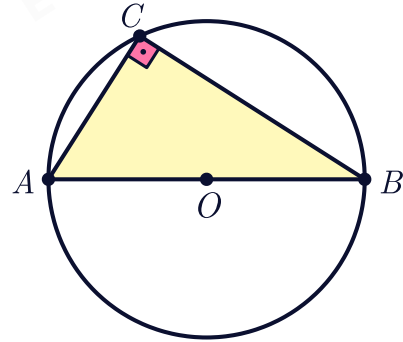


9.4 Çapı Gören Çevre Açısı

Çapı gören çevre açısı 90° dir (Thales).

$$[AB] \text{ çap} \Rightarrow m(\widehat{ACB}) = 90^\circ$$

NEREDEN? Çap 180°'lik yay görür: $\frac{180^\circ}{2}$.

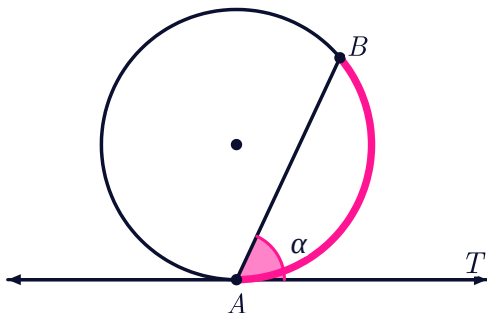


9.5 Teğet-Kiriş Açısı

Teğet ile değme noktasından çizilen kirişin oluşturduğu açı, gördüğü yayın yarısıdır.

$$m(\widehat{BAT}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$$

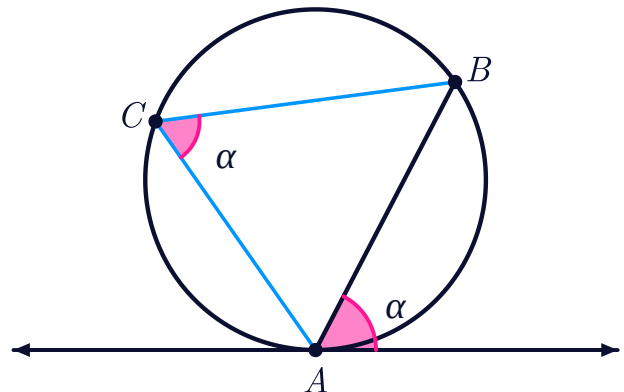
NEREDEN? Çevre açının bir kolu dönerek teğet olduğu sınır durumudur.



9.6 Teğet-Kiriş = Çevre Açısı

Aynı yayı gören teğet-kiriş açısı ile çevre açısı eşittir.

NEREDEN? İkisi de $\frac{m(\widehat{AB})}{2}$.



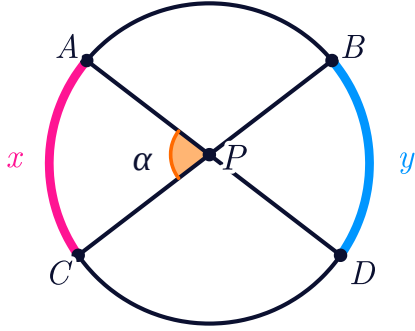
9. DURAK ÇEMBERDE AÇILAR (2): İÇ AÇI VE DIŞ AÇI

9.1 İç Açı (Kesişen Kirişler)

İki kiriş çemberin içinde P 'de kesişirse açı, gördüğü iki yayın **toplamının yarısıdır**.

$$\alpha = \frac{x+y}{2}$$

NEREDEN? $[AB]$ çizilir: α , PAB üçgeninde $\widehat{A}$ ve $\widehat{B}$ çevre açılarının toplamıdır (dış açı).

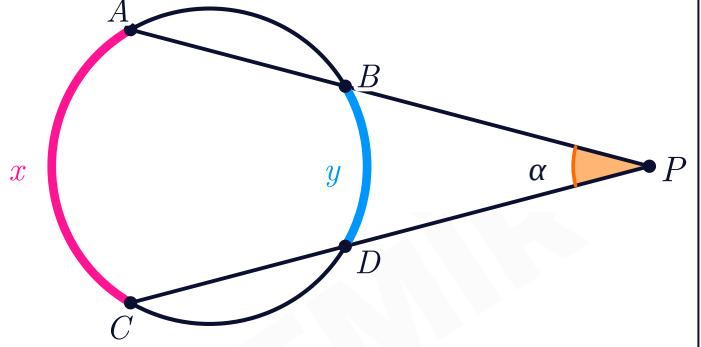


9.2 Dış Açı (İki Kesen)

İki kesen dışarıda P 'de kesişirse açı, **büyük yay ile küçük yayın farkının yarısıdır**.

$$\alpha = \frac{x-y}{2}$$

NEREDEN? $[AD]$ çizilir: büyük yayı gören çevre açı = $\alpha +$ küçük yayı gören çevre açı.

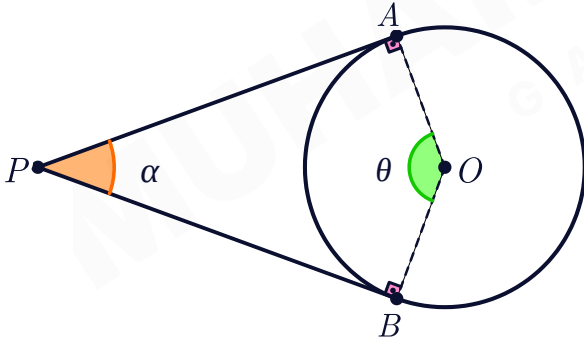


9.3 İki Teğet

Dış noktadan çizilen iki teğet arasındaki açı ile teğet noktalarını gören merkez açı **bütünlerdir**.

$$\alpha + \theta = 180^\circ$$

NEREDEN? $PAOB$ dörtgeninde A ve B açıları 90° :
 $\alpha + \theta = 360^\circ - 180^\circ$.

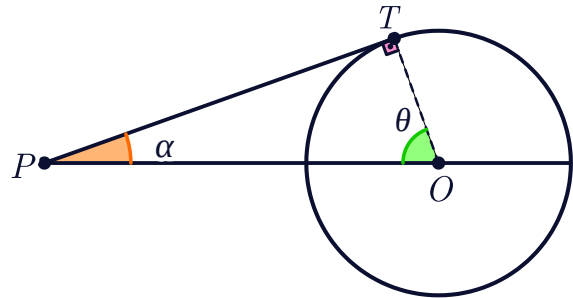


9.4 Teğet ve Merkezden Geçen Kesen

Kesen merkezden geçerse teğet açısı ile $\widehat{TOP}$ tümlerdir.

$$\alpha + \theta = 90^\circ$$

NEREDEN? PTO dik üçgenidir ($[OT] \perp$ teğet).



9.5 Formül Seçimi

Açının köşesi	Ölçü
Merkezde	yay
Çember üzerinde	$\frac{\text{yay}}{2}$
Çemberin içinde	$\frac{\text{yay}_1 + \text{yay}_2}{2}$
Çemberin dışında	$\frac{\text{büyük} - \text{küçük}}{2}$

ABD Amerikan ders kitaplarındaki kısa hatırlatma: "In $\rightarrow$ add, Out $\rightarrow$ subtract, On $\rightarrow$ half" (içeride topla, dışarıda çıkar, üzerinde yarıla).

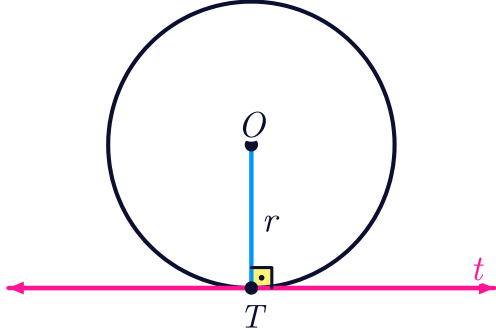
9. DURAK TEĞET ÖZELLİKLERİ VE ORTAK TEĞETLER

9.1 Teğet Yarıçapa Diktir

Değme noktasındaki yarıçap teğete diktir.

$$[OT] \perp t$$

NEREDEN? Teğet üzerindeki her noktanın merkeze uzaklığı r 'den büyüktür; en yakın nokta T 'dir ve en kısa yol dikmedir.

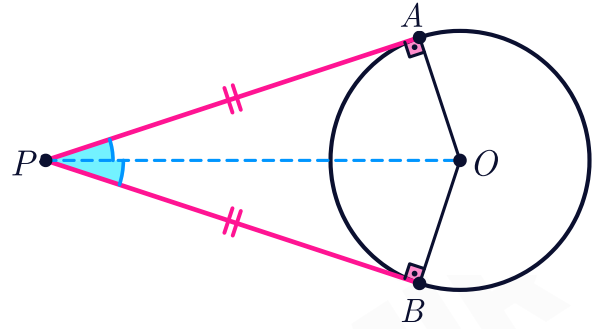


9.2 Dış Noktadan Teğetler

Dış noktadan çizilen iki teğet parçası eşittir. $[PO]$, hem APB 'nin hem AOB 'nin açıortaydır.

$$|PA| = |PB| = \sqrt{|PO|^2 - r^2}$$

NEREDEN? PAO ve PBO dik üçgenleri HK ile eştir.

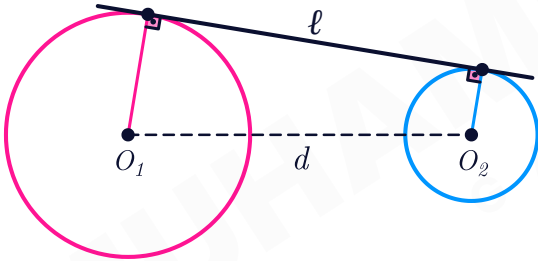


9.3 Dış Ortak Teğet

Merkezler arası $d = |O_1 O_2|$ ise dış ortak teğet parçası

$$\ell = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

NEREDEN? O_2 'den $O_1 T_1$ 'e paralel çizilir; kenarları d , $r_1 - r_2$, ℓ olan dik üçgen oluşur.

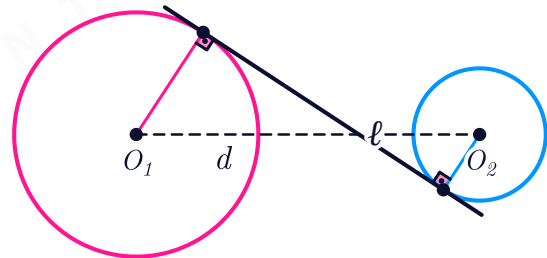


9.4 İç Ortak Teğet

Çemberler ayrıksa iç ortak teğet parçası

$$\ell = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$$

NEREDEN? Aynı yöntem; bu kez dik kenar $r_1 + r_2$ olur.

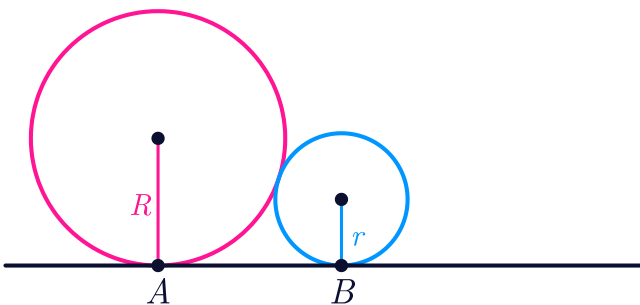


9.5 Birbirine Teğet İki Çemberin Ortak Teğeti

Dıştan teğet çemberlerin ortak dış teğet parçası:

$$|AB| = 2\sqrt{R \cdot r}$$

NEREDEN? Dış ortak teğet formülünde $d = R + r$ yazılır: $(R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr$.



9.6 Teğet Çemberler

- İki çember teğetse, merkezleri ve teğet noktası **doğrusaldır**.
- Dıştan teğette $d = r_1 + r_2$, içten teğette $d = |r_1 - r_2|$.
- Dıştan teğet iki çemberin 3, kesişen iki çemberin 2 ortak teğeti vardır.

9. DURAK ÇEMBERDE UZUNLUK: NOKTANIN KUVVETİ

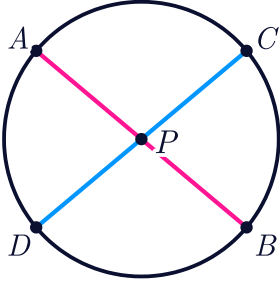
9.1 İçte Kesişen Kirişler

Kirişler P 'de kesişirse

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

NEREDEN? $PAC \sim PDB$ (aynı yayı gören çevre açıları eşit):

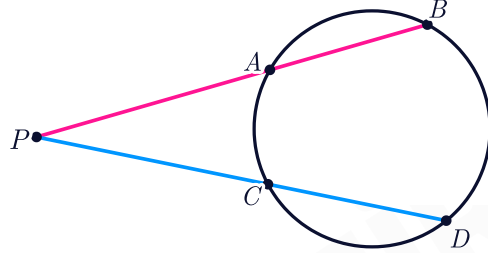
$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|}$$



9.2 Kesen – Kesen

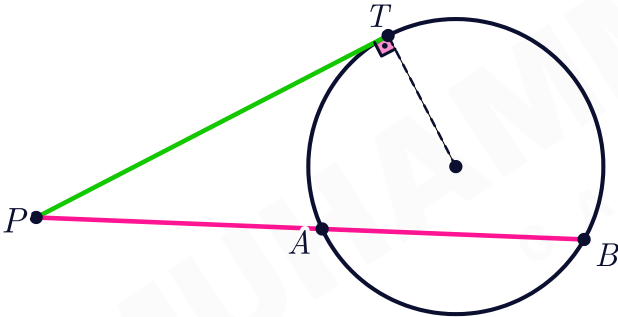
 P dışarıda, A ve C yakın, B ve D uzak kesim noktaları:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

DİKKAT Çarpılanlar **dış parça** ve **bütün kesend**; $|AB|$ gibi iç parçalar değil.NEREDEN? $PAD \sim PCB$ (ortak açı P ve aynı yayı gören çevre açıları).

9.3 Teğet – Kesen

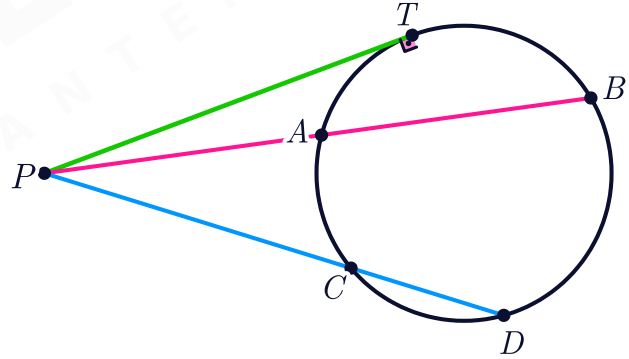
$$|PT|^2 = |PA| \cdot |PB|$$

NEREDEN? $PTA \sim PBT$: teğet-kiriş açısı ile çevre açısı eşittir, P ortak.

9.4 Hepsi Bir Arada

Bir dış noktadan çizilen **her** kesen ve teğet için çarpım aynıdır:

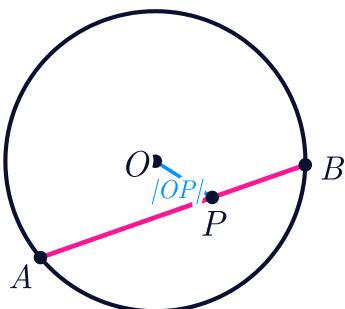
$$|PT|^2 = |PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$



9.5 İç Noktanın Kuvveti

 P içerideyse, P 'den geçen her kiriş için

$$|PA| \cdot |PB| = r^2 - |OP|^2$$

NEREDEN? P 'den geçen çap alınır: parçalar $r - |OP|$ ve $r + |OP|$.

9.6 Noktanın Kuvveti (Tek Formül)

$$\text{Kuvvet}(P) = |OP|^2 - r^2$$

- P dışarıda $\rightarrow$ pozitif $= |PT|^2$
- P çember üzerinde $\rightarrow 0$
- P içeride $\rightarrow$ negatif; büyüklüğü $|PA| \cdot |PB|$

HINDİSTAN JEE hazırlığında üç bağıntı ayrı ayrı ezberlenmez; "**power of a point**" tek kural olarak öğretilir. Kural: noktadan çember üzerindeki iki noktaya uzaklıkların çarpımı, doğruyu ne olursa olsun sabittir.

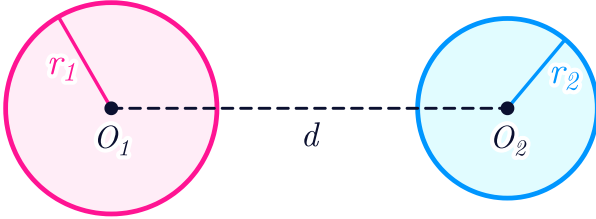
9. DURAK İKİ ÇEMBERİN BİRBİRİNE GÖRE KONUMLARI

9.1 Dıştan Ayrık

Bu sayfada $d = |O_1 O_2|$, merkezler arası uzaklıktır.

$$d > r_1 + r_2$$

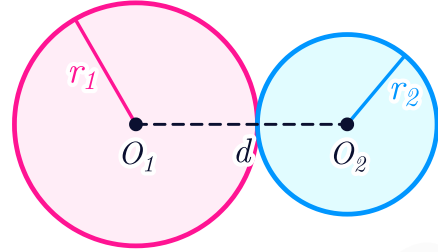
Ortak nokta yok; 4 ortak teğet.



9.2 Dıştan Teğet

$$d = r_1 + r_2$$

Bir ortak nokta; 3 ortak teğet.

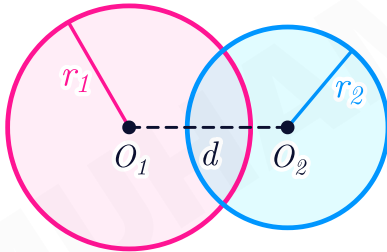


9.3 Kesişen

$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$$

İki ortak nokta; ortak kiriş merkezler doğrusuna diktir ve onun tarafından ortalınır. 2 ortak teğet.

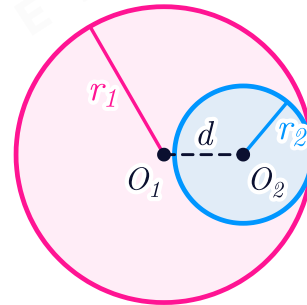
NEREDEN? Her iki merkez de ortak kirişin orta dikmesi üzerindedir.



9.4 İçten Teğet

$$d = |r_1 - r_2|$$

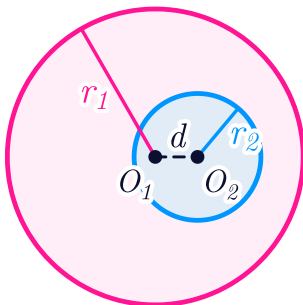
Bir ortak nokta; 1 ortak teğet.



9.5 İç içe

$$d < |r_1 - r_2|$$

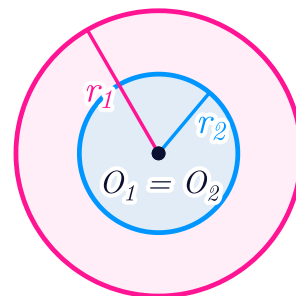
Ortak nokta ve ortak teğet yok.



9.6 Eş Merkezli

$$d = 0$$

Merkezler çakışır ($O_1 = O_2$). Aradaki bölgeye **daire halkası** denir.



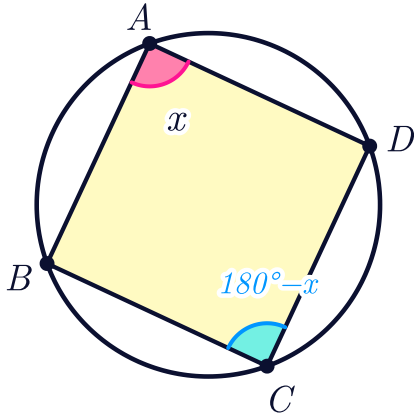
9. DURAK KIRIŞLAR DÖRTGENİ VE TEĞETLER DÖRTGENİ

9.1 Kirişler Dörtgeni

Dört köşesi aynı çember üzerinde olan dörtgen. **Karşı açılar bütündür.**

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$$

NEREDEN? $\widehat{A}$ ve $\widehat{C}$ çevre açıları, birlikte bütün çemberi (360°) görür: $\frac{360^\circ}{2}$.

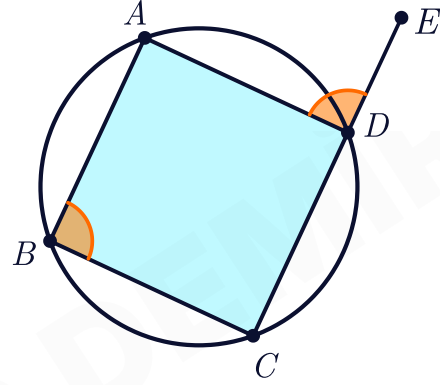


9.2 Dış Aç

Kirişler dörtgeninde bir dış açı, **karşısındaki iç açıya** eşittir.

$$m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ABC})$$

NEREDEN? İkisi de $\widehat{ADC}$ 'nin bütünüleridir.

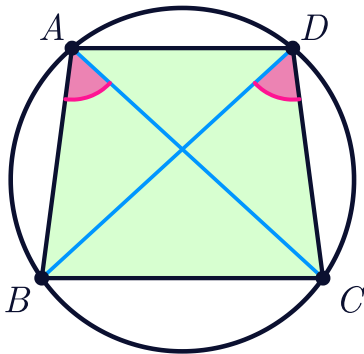


9.3 Aynı Kenarı Gören Açılar

Bir kenarı gören iki açı eşittir.

$$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BDC})$$

NOT Bu üç özellikten biri sağlanıyorsa dörtgen çemberseldir. Her dikdörtgen ve her ikizkenar yamuk çemberseldir.



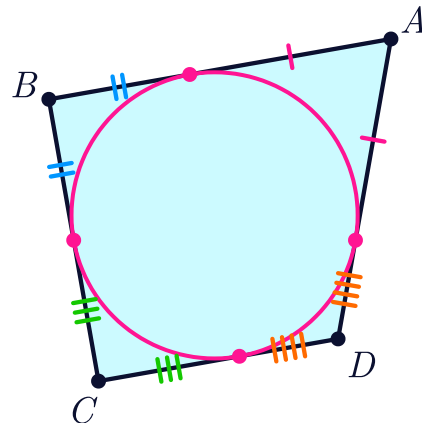
9.4 Teğetler Dörtgeni ve Pitot

Dört kenarı aynı çembere teğet olan dörtgen. Aynı renkli teğet parçaları eşittir.

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$$

Alan: $A = u \cdot r$ (u : yarı çevre)

NEREDEN? Her kenar, iki köşeden çizilen birer teğet parçasının toplamıdır; karşılıklı kenar toplamlarının ikisi de dört farklı parçayı birer kez içerir.



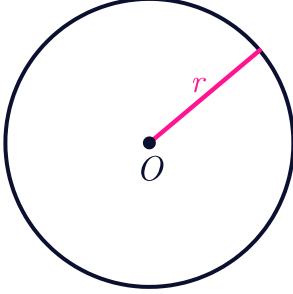
9. DURAK ÇEVRE, YAY UZUNLUĞU, DİLİM VE PARÇA

9.1 Çemberin Çevresi

$$\mathcal{C} = 2\pi r$$

NEREDEN? π , her çemberde çevrenin çapa oranıdır:

$$\frac{\mathcal{C}}{2r} = \pi \approx 3,14.$$



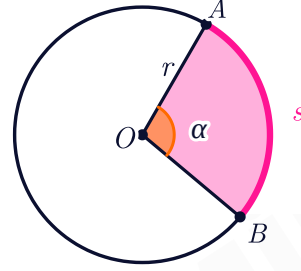
9.2 Yay Uzunluğu

Merkez açısı α olan yayın uzunluğu:

$$|\widehat{AB}| = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Radyanla (θ): $|\widehat{AB}| = r \cdot \theta$

NEREDEN? Yay, çevrenin $\frac{\alpha}{360^\circ}$ 'lik kısmıdır.

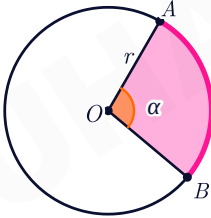


9.3 Daire Dilimi Alanı

$$S = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

$$S = \frac{|\widehat{AB}| \cdot r}{2}$$

NEREDEN? Dilim, dairenin $\frac{\alpha}{360^\circ}$ 'lik kısmıdır. İkinci formül, "taban = yay, yükseklik = r " olan üçgene benzer.

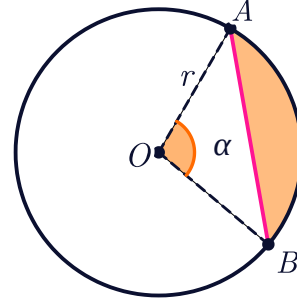


9.4 Daire Parçası Alanı

Dilimden OAB üçgeni çıkarılır:

$$S = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha$$

NEREDEN? $A(OAB) = \frac{1}{2} r \cdot r \cdot \sin \alpha$



9.5 Özel Dilimler

Dilim	Alan
Yarım daire	$\frac{\pi r^2}{2}$
Çeyrek daire	$\frac{\pi r^2}{4}$
Çeyrek daire parçası	$\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$

NEREDEN? Çeyrek daire parçasında $\alpha = 90^\circ$, $\sin 90^\circ = 1$.

9.6 Dikkat

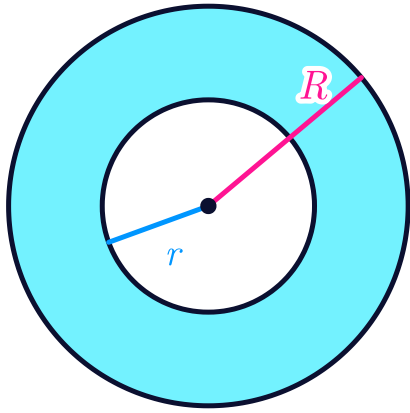
- Yayın **ölçüsü** derece, **uzunluğu** uzunluk birimidir.
- Formülde açı birimini (derece/radyan) karıştıрма.
- $\alpha > 180^\circ$ olan parçada üçgen alanı çıkarılmaz, **eklenir**; formül $\sin \alpha < 0$ sayesinde yine doğru sonuç verir.

9. DURAK DAİREDE ALAN

9.1 Daire Halkası

Eş merkezli iki dairenin arasındaki bölge:

$$S = \pi(R^2 - r^2)$$

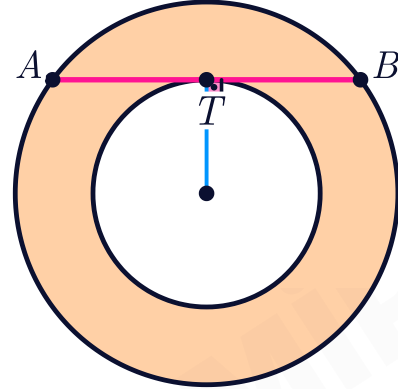


9.2 Küçük Çembere Teğet Kiriş

Büyük çemberin kirişi, küçük çembere T 'de teğet ise halka alanı yalnız kiriş yarısına bağlıdır:

$$S = \pi \cdot |AT|^2$$

NEREDEN? OTA dik üçgeninde $R^2 - r^2 = |AT|^2$.

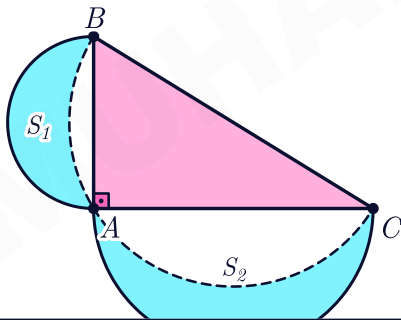


9.3 Hipokrat'ın Ayları

Dik üçgenin dik kenarları üzerine yarım daireler çizilir; hipotenüs üzerindeki yarım daire dışında kalan iki ay (S_1 , S_2):

$$S_1 + S_2 = A(ABC)$$

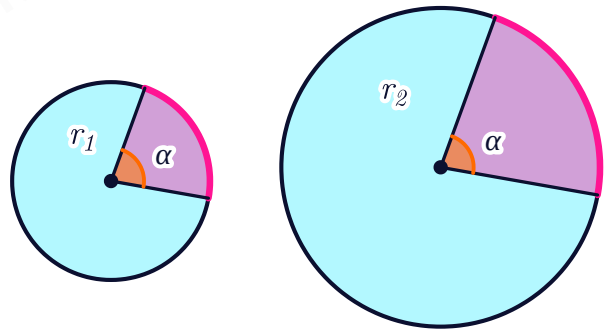
NEREDEN? Pisagor'dan: dik kenarlardaki yarım dairelerin alanları toplamı, hipotenüsteki yarım dairenin alanına eşittir. Ortak parçalar çıkarılınca üçgen kalır.



9.4 Aynı Açılı Dilimler

Merkez açıları eşit dilimler benzerdir; oran $k = \frac{r_1}{r_2}$:

$$\frac{\text{yay}_1}{\text{yay}_2} = k \quad \frac{S_1}{S_2} = k^2$$



9.5 Özet Tablo

	Derece (α)	Radyan (θ)
Çevre	$2\pi r$	$2\pi r$
Yay	$2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$	$r\theta$
Daire	πr^2	πr^2
Dilim	$\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$	$\frac{r^2\theta}{2}$

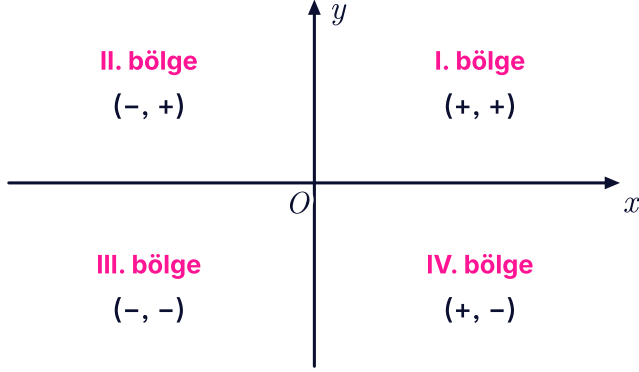
ESKİ YUNAN Sakız Adalı Hipokrat (MÖ 440), eğrilerle sınırlı bir bölgenin alanını tam olarak bulan ilk kişidir; aylar bu yüzden ünlüdür.

10. DURAK KOORDİNAT SİSTEMİ VE NOKTA

10.1 Analitik Düzlem ve Bölgeler

x eksenini ile y eksenini düzlemi dört bölgeye ayırır. Eksenler üzerindeki noktalar **hiçbir bölgeye** ait değildir.

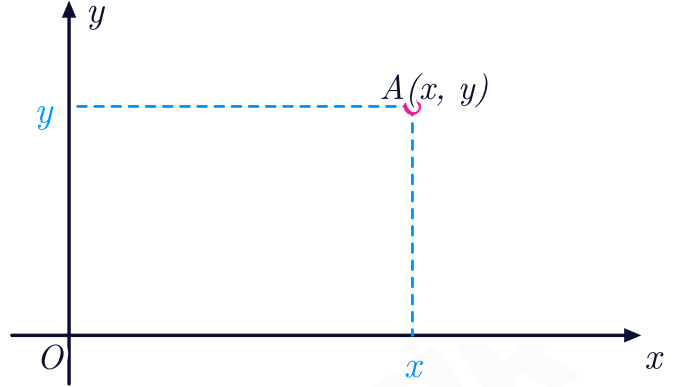
FRANSA Koordinat sistemi René Descartes'ın (1637) adıyla "Kartezyen" diye anılır: geometri problemleri cebir denklemlerine dönüşür.



10.2 Nokta Gösterimi

$$A(x, y)$$

x : **apsis**, y : **ordinat**. x eksenini üzerinde $y = 0$, y eksenini üzerinde $x = 0$ dir.



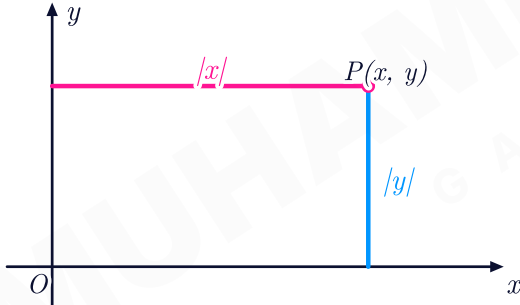
10.3 Eksenlere Uzaklık

$P(x, y)$ noktası için

$$x \text{ eksenine uzaklık} = |y|$$

$$y \text{ eksenine uzaklık} = |x|$$

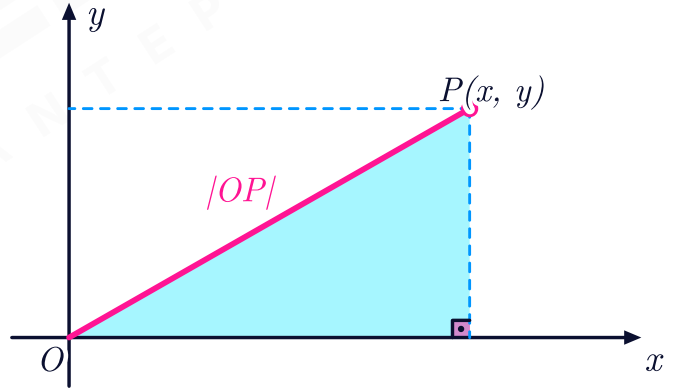
NEREDEN? Eksene inilen dikmenin uzunluğu, öbür koordinatın mutlak değeridir.



10.4 Orijine Uzaklık

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

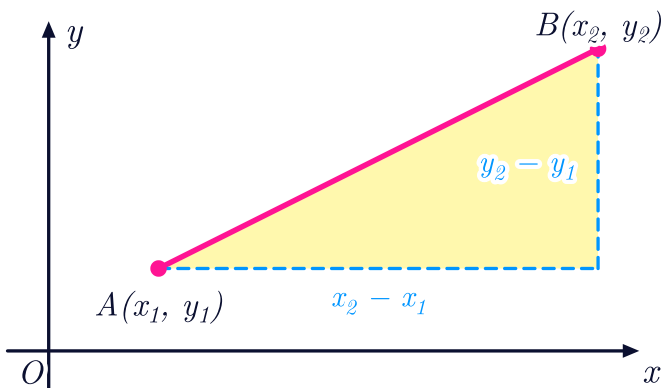
NEREDEN? Dik kenarları $|x|$ ve $|y|$ olan dik üçgende Pisagor.



10.5 İki Nokta Arası Uzaklık

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

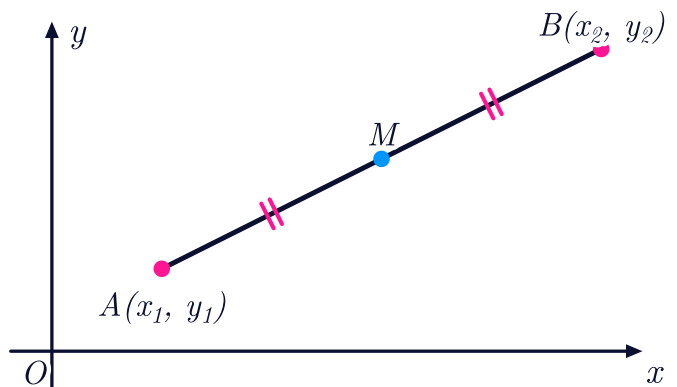
NEREDEN? Eksenlere paralel dik kenarlarla Pisagor.



10.6 Orta Nokta

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

NEREDEN? Koordinatların aritmetik ortalaması.



10. DURAK BÖLME, ALAN VE AĞIRLIK MERKEZİ

10.1 İçten Bölme

$P \in [AB]$ ve $|AP| : |PB| = m : n$ ise

$$P\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$$

İPUÇU Çapraz çarpım: A 'nın katsayısı n , B 'ninki m . P , büyük katsayılı noktaya daha yakındır.

NEREDEN? Eksenlere izdüşüm alınınca Thales: koordinat farkları da $m : n$ oranında bölünür.

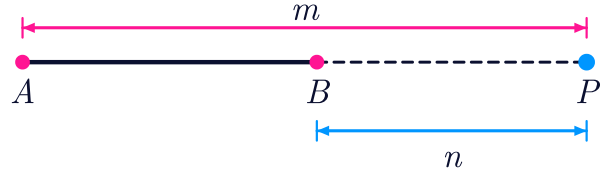


10.2 Dıştan Bölme

MERAKLISINA

$P, [AB]$ 'nin dışında ve $|AP| : |PB| = m : n$ ($m \neq n$) ise

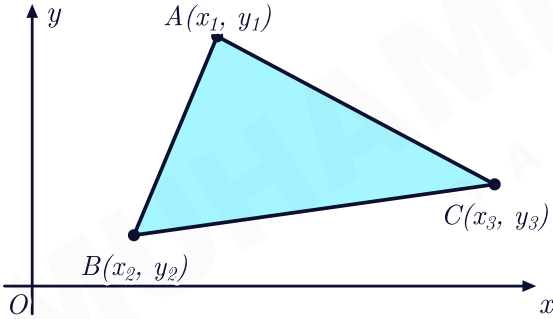
$$P\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$$



10.3 Koordinatlarla Üçgen Alanı

$$A = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

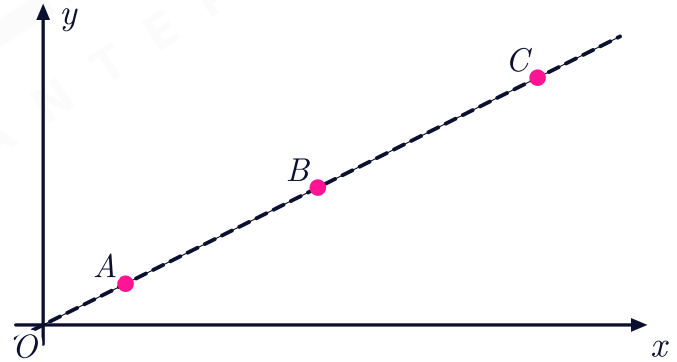
ABD Ayakkabı bağı (shoelace) yöntemi: koordinatlar alt alta yazılıp çapraz çarpılır; bir yöndeki çarpımlar toplamından öbür yöndekiler çıkarılır ve yarısi alınır. Çokgenlerde de çalışır.



10.4 Doğrusallık Koşulu

A, B, C doğrusal $\Leftrightarrow A(ABC) = 0 \Leftrightarrow m_{AB} = m_{AC}$

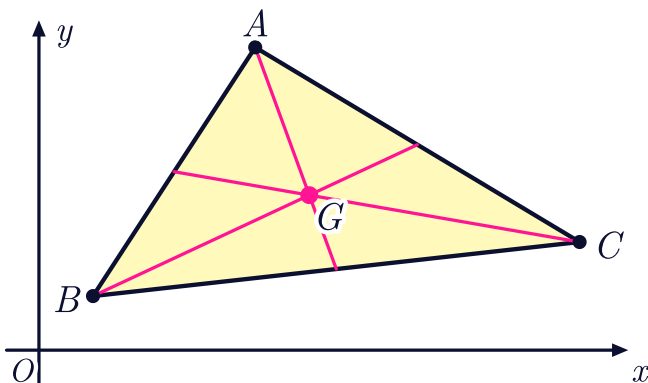
NEREDEN? Doğrusal noktalarla "üçgen" yüksekliksiz kalır; alan sıfırdır.



10.5 Ağırlık Merkezi

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

NEREDEN? G , kenarortayı 2 : 1 böler; içten bölme formülü uygulanır.



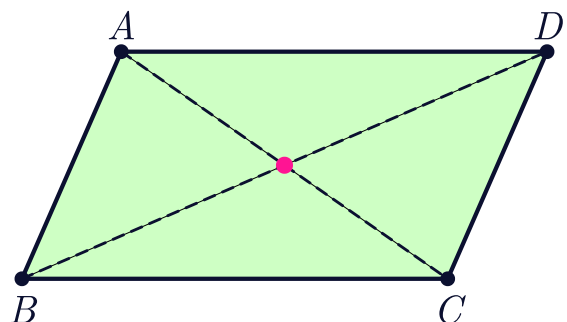
10.6 Paralelkenarın Dördüncü Köşesi

$ABCD$ paralelkenarında köşegenler birbirini ortalar:

$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

NEREDEN? İki köşegenin orta noktası aynı noktadır.



10. DURAK DOĞRUNUN DENKLEMİ

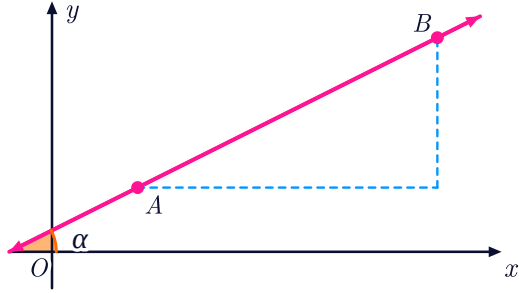
10.1 Eğim

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ 'den geçen doğrunun eğimi

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \alpha$$

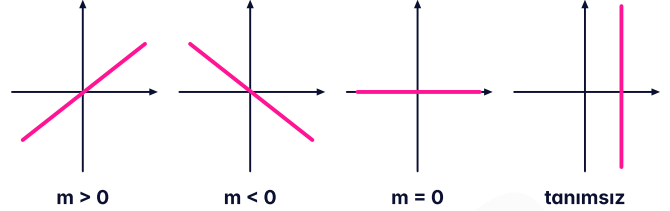
α : doğrunun x eksenine pozitif yönde yaptığı açı

NEREDEN? Dik üçgende $\tan \alpha = \frac{\text{karşı}}{\text{komşu}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.



10.2 Eğimin İşareti

- $0^\circ < \alpha < 90^\circ \rightarrow m > 0$ (artan)
- $90^\circ < \alpha < 180^\circ \rightarrow m < 0$ (azalan)
- x eksenine paralel $\rightarrow m = 0$; y eksenine paralel $\rightarrow$ tanımsız

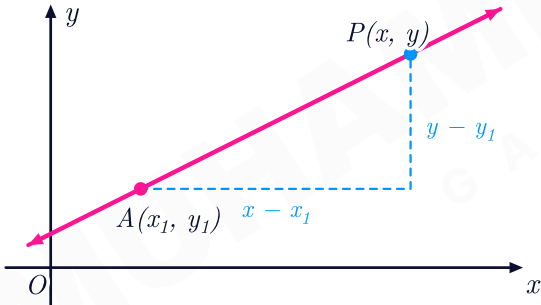


10.3 Nokta – Eğim ve İki Nokta Formu

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

NEREDEN? Doğru üzerindeki her $P(x, y)$ için A ile P arasındaki eğim de m 'dir.

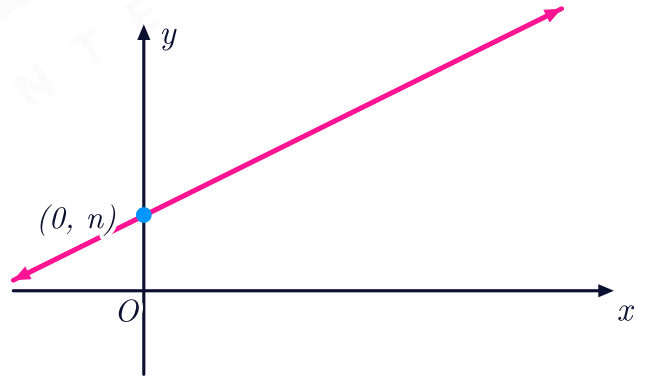


10.4 Eğim – Kesişim ve Genel Denklem

$$y = mx + n$$

n : y eksenini kestiği noktanın ordinatı

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow m = -\frac{a}{b}$$

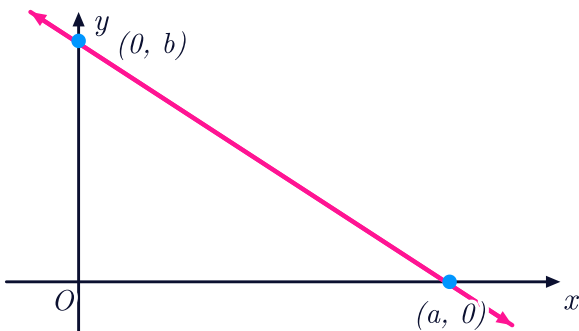


10.5 Eksenleri Kesen Doğru

Eksenleri $(a, 0)$ ve $(0, b)$ 'de kesen doğru ($a, b \neq 0$):

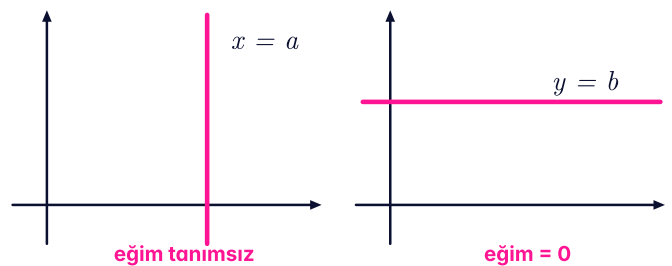
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

NEREDEN? İki nokta formunda $(a, 0)$ ve $(0, b)$ yazılıp düzenlenir.



10.6 Özel Doğrular

$x = a$: y eksenine paralel. $y = b$: x eksenine paralel.
 $y = x$ ve $y = -x$ eksenlerin açıortayları. $y = mx$ orijinden geçer.



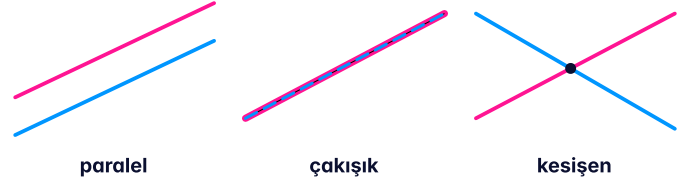
10. DURAK İKİ DOĞRU: KONUM, AÇI, UZAKLIK

10.1 İki Doğrunun Konumu

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ için

Durum	Koşul
Paralel	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
Çakışık	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
Kesişen	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

NEREDEN? Katsayılar orantılıysa eğimler eşittir; sabitler de orantılıysa denklemler aynı doğruyu verir.



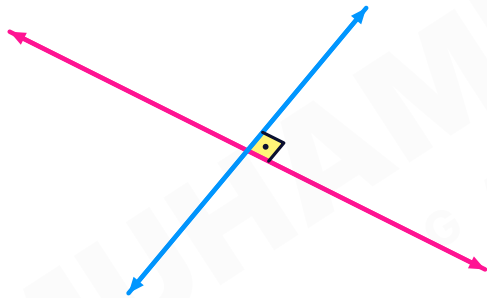
10.2 Paralel ve Dik Doğrular

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

NOT Dik koşulu, eğimleri tanımlı doğrular içindir. $x = a$ ile $y = b$ de diktir.

NEREDEN? Bir doğru 90° döndürülünce eğimi $-\frac{1}{m}$ olur.



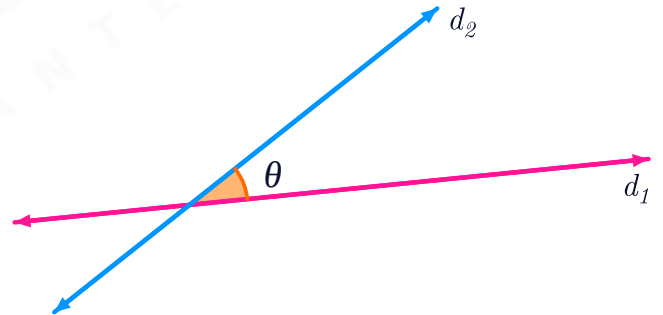
10.3 İki Doğru Arasındaki Aç

θ dar aç:

$$\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$

DIKKAT Formül $1 + m_1 m_2 \neq 0$ iken geçerlidir; $1 + m_1 m_2 = 0$ ise doğrular **diktir**.

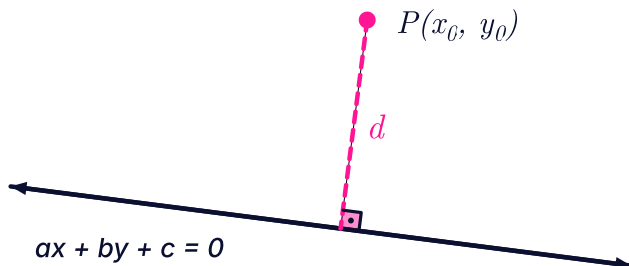
NEREDEN? $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$ ve tanjant fark formülü.



10.4 Noktadan Doğruya Uzaklık

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

NEREDEN? Noktadan doğruya en kısa yol dikmedir; dikme ayağı ortak çözümle bulunup uzaklık formülü sadeleştirilir.



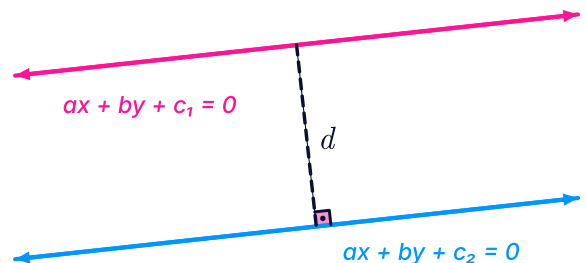
10.5 Paralel Doğrular Arası Uzaklık

x ve y katsayıları **aynı** yapıldıktan sonra

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

DIKKAT $2x + 4y - 6 = 0$ gibi katsayılar farklıysa önce sadeleştir: $x + 2y - 3 = 0$

NEREDEN? Birinci doğrudan bir nokta seçilip ikinciye uzaklık alınır.



10. DURAK

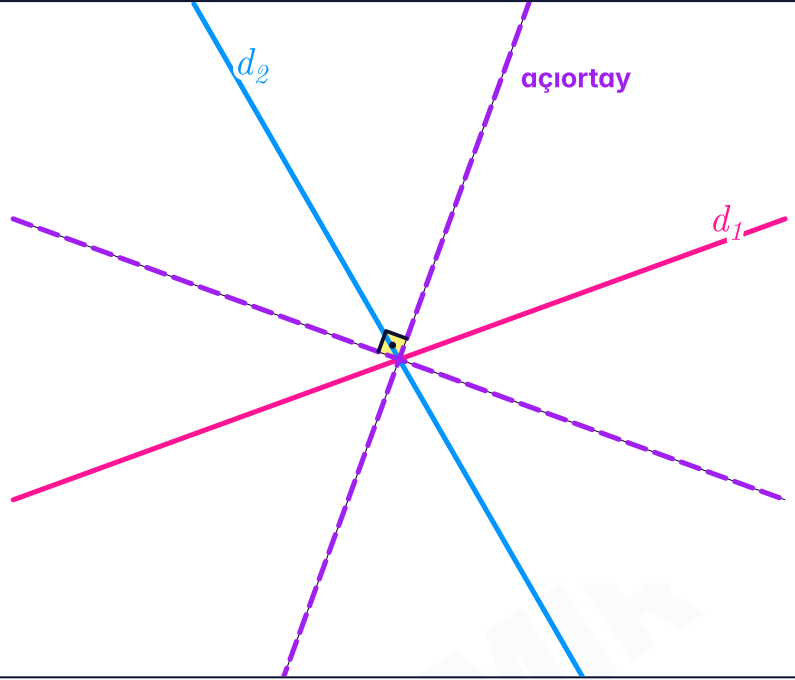
AÇIORTAY DENKLEMLERİ VE GEOMETRİK YER

10.1 Açıortay Denklemi

d_1 ve d_2 doğrularının açıortayları (iki tane, birbirine dik):

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

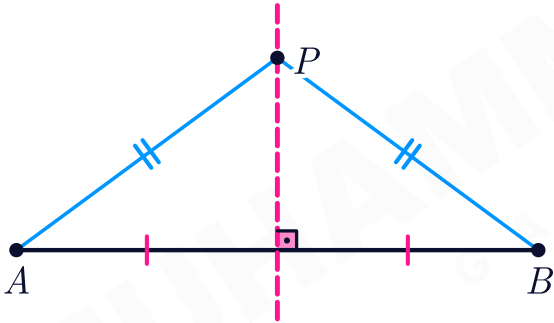
NEREDEN? Açıortay üzerindeki her nokta iki kola eşit uzaklıktadır; mutlak değer açılınca iki doğru çıkar.



10.2 İki Noktaya Eşit Uzaklık

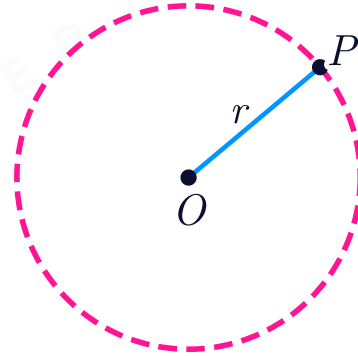
$|PA| = |PB| \rightarrow [AB]$ 'nin **orta dikmesi**.

İPUCU $A(1, 2), B(5, 2): (x-1)^2 = (x-5)^2 \rightarrow x=3$



10.3 Bir Noktaya Sabit Uzaklık

$|OP| = r \rightarrow$ merkezi O , yarıçapı r olan **çember**.



10.4 Bir Doğruya Sabit Uzaklık

d doğrusuna k uzaklıktaki noktalar $\rightarrow d$ 'ye paralel **iki doğru**.



10.5 Paralel İki Doğruya Eşit Uzaklık

$ax + by + c_1 = 0$ ve $ax + by + c_2 = 0$ 'a eşit uzaklıktaki noktalar:

$$ax + by + \frac{c_1 + c_2}{2} = 0$$



10. DURAK

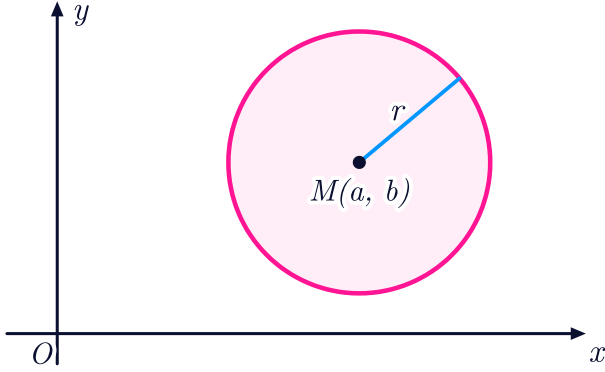
ÇEMBERİN ANALİTİK İNCELENMESİ

10.1 Standart Denklemler

Merkezi $M(a, b)$, yarıçapı r :

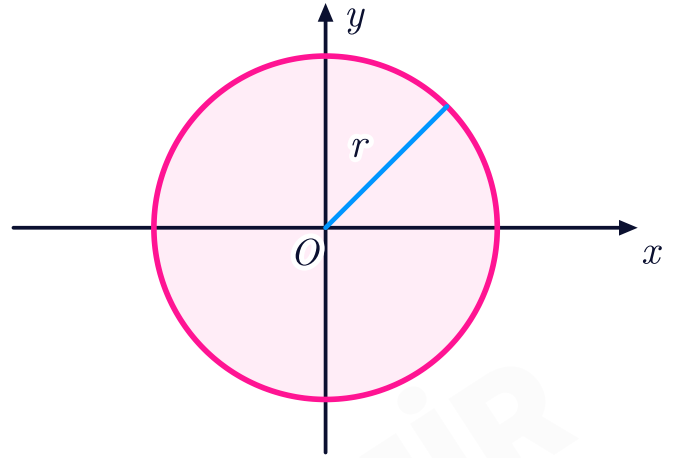
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

NEREDEN? Çember üzerindeki her $P(x, y)$ için $|PM| = r$; uzaklık formülünün karesi alınır.



10.2 Merkezi Orijinde

$$x^2 + y^2 = r^2$$



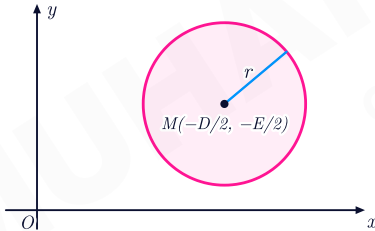
10.3 Genel Denklemler

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

DIKKAT Çember olması için: x^2 ve y^2 katsayıları eşit, xy terimi yok ve $D^2 + E^2 - 4F > 0$.

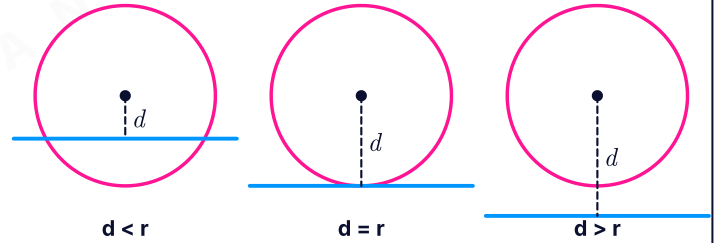
NEREDEN? Standart denklemler açılıp terimler karşılaştırılır: $D = -2a$, $E = -2b$.



10.4 Doğru - Çember Konumu

Merkezin doğruya uzaklığı d (noktadan doğruya uzaklık formülüyle):

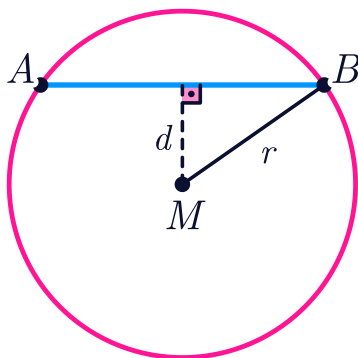
ALMANYA Alman liselerinde ikinci yol da öğretilir: doğru denklemini çembere yazılır, ikinci derece denklemin diskriminantı $\Delta > 0$ kesen, $\Delta = 0$ teğet, $\Delta < 0$ ayrıt.



10.5 Kiriş Uzunluğu

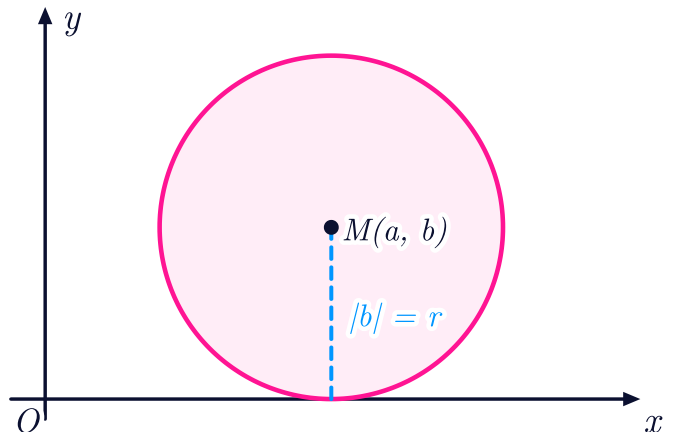
$$|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

NEREDEN? Merkezden kirişe dikme kirişi ortalar (9. Durak).



10.6 Eksenlere Teğet Çember

- x eksenine teğet $\Leftrightarrow r = |b|$
- y eksenine teğet $\Leftrightarrow r = |a|$
- İki eksene teğet $\Leftrightarrow r = |a| = |b|$



10. DURAK

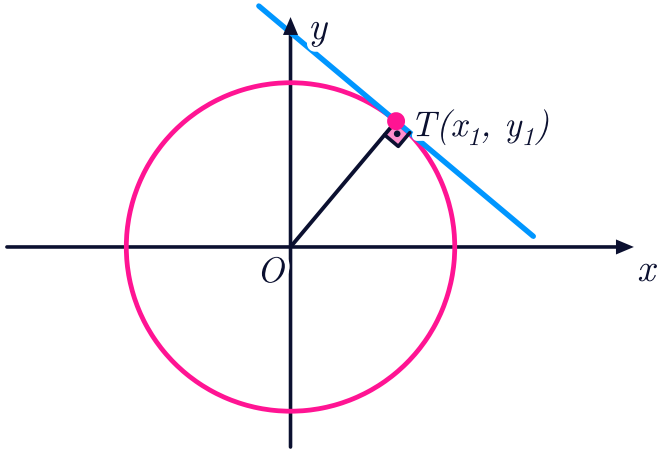
ÇEMBERE TEĞET VE RADİKAL EKSEN

10.1 Teğet Denklemi: Merkez Orijinde

$x^2 + y^2 = r^2$ çemberine üzerindeki $T(x_1, y_1)$ 'den teğet:

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = r^2$$

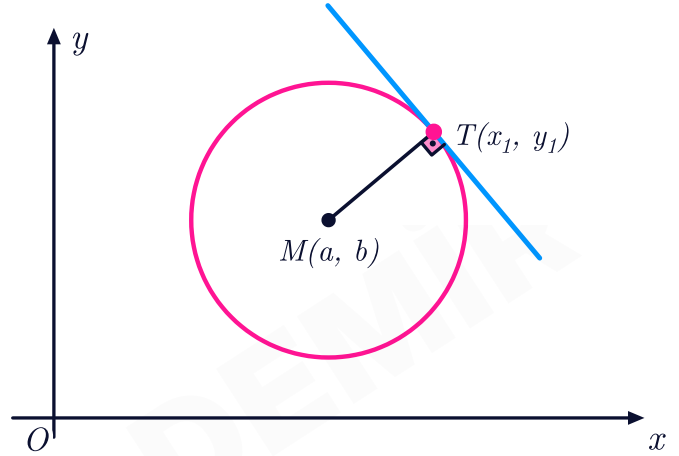
NEREDEN? Teğet, $[OT]$ 'ye diktir: eğimi $-\frac{x_1}{y_1}$.



10.2 Teğet Denklemi: Genel Merkez

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ çemberine $T(x_1, y_1)$ 'den teğet:

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

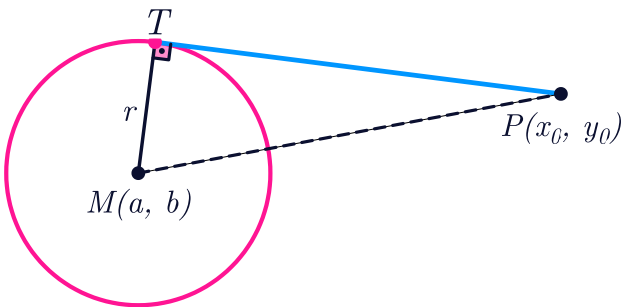


10.3 Dış Noktadan Teğet Uzunluğu

$$|PT|^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$$

Genel denklemde: $|PT|^2 = x_0^2 + y_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F$

NEREDEN? PTM dik üçgeninde Pisagor; sonuç noktanın kuvvetidir.



10.4 Radikal Eksen

MERAKLISINA

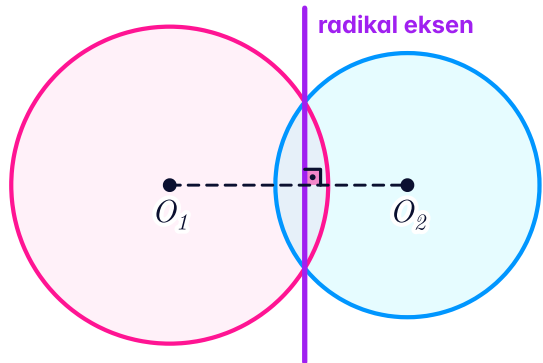
İki çembere göre kuvvetleri eşit noktaların kümesi.

Merkezler doğrusuna diktir. Denklemi:

$$S_1 - S_2 = 0$$

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0$$

NEREDEN? Kuvvetler eşitlenince $x^2 + y^2$ terimleri sadeleşir; geriye doğru denklemi kalır.



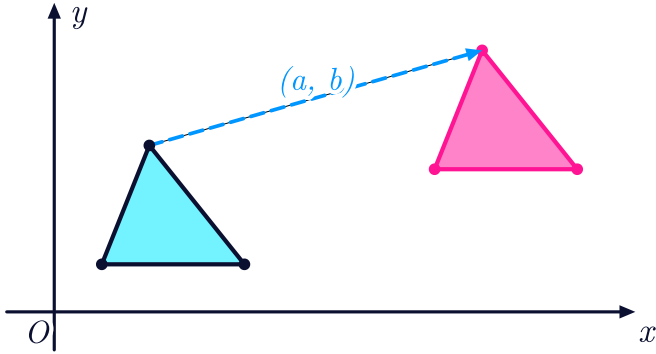
11. DURAK

ÖTELEME, YANSIMA VE DÖNME

11.1 Öteleme

Her nokta aynı yönde, aynı miktarda kaydırılır:

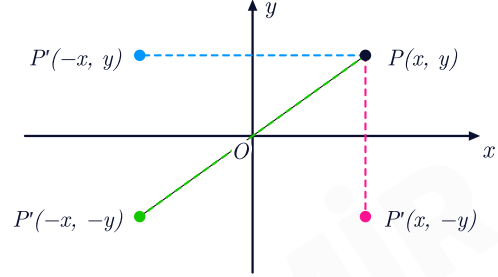
$$(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$$



11.2 Eksenlere ve Orijine Göre Yansım

Yansım	Görüntü
x eksenine göre	$(x, -y)$
y eksenine göre	$(-x, y)$
Orijine göre	$(-x, -y)$

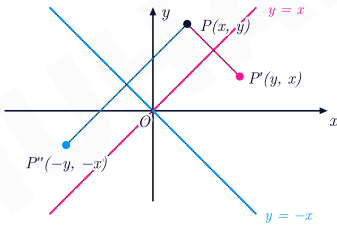
NEREDEN? Eksen, nokta ile görüntüsünü birleştiren doğru parçasının orta dikmesidir.



11.3 Doğrulara Göre Yansım

Doğru	Görüntü
$y = x$	(y, x)
$y = -x$	$(-y, -x)$
$x = a$	$(2a - x, y)$
$y = b$	$(x, 2b - y)$

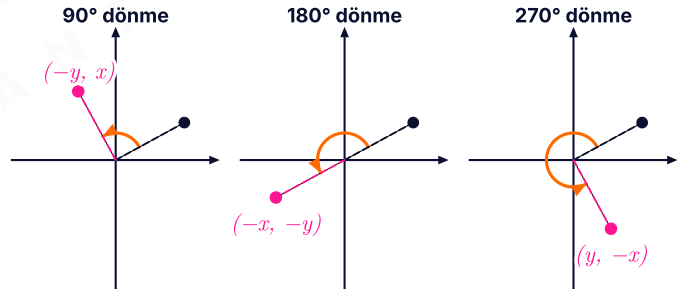
NEREDEN? $x = a$ için: nokta ile görüntüsünün orta noktası doğru üzerindedir: $\frac{x + x'}{2} = a$.



11.4 Orijin Etrafında Dönme

Açılar **saat yönünün tersine** (pozitif yön) ölçülür.

Dönme	90°	180°	270° (saat yönünde 90°)
Görüntü	$(-y, x)$	$(-x, -y)$	$(y, -x)$



11.5 Korunan Özellikler

Öteleme, yansım ve dönme **izometridir** (uzunluk korur):

- Uzunluklar, açılar ve alanlar korunur.
- Paralellik ve diklik korunur.
- Şekil kendisine **eş** bir şekle dönüşür.

11.6 Yön Korunur mu?

Öteleme ve dönme yönü korur; **yansım** ayna görüntüsü verir, yönü değiştirir.

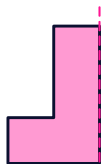
NEREDEN? Yansımada köşelerin dolanma sırası (saat yönü $\leftrightarrow$ tersi) değişir.



şekil



90° dönme: yön aynı



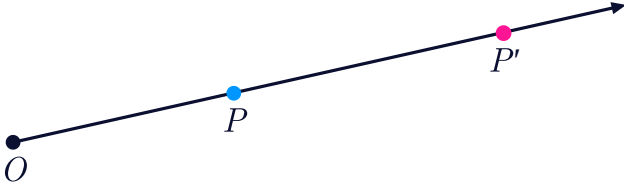
yansım: ayna görüntüsü

11. DURAK HOMOTETİ VE SİMETRİ

11.1 Homoteti

MERAKLISINA

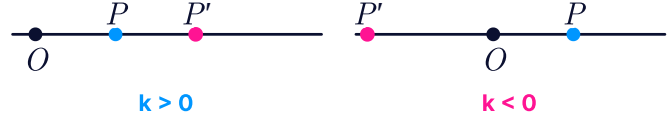
O sabit nokta, $k \neq 0$ olsun. Her P noktasını O, P, P' doğrusal ve $|OP'| = |k| \cdot |OP|$ olacak şekilde P' 'ye götüren dönüşüme **O merkezli, k oranlı homoteti** denir.



11.2 Oranın İşareti

MERAKLISINA

- $k > 0$: P' , $[OP]$ ışını üzerindedir (aynı yön).
- $k < 0$: P' , O 'nun öbür tarafındadır (ters ışın).



11.3 Koordinat Düzleminde

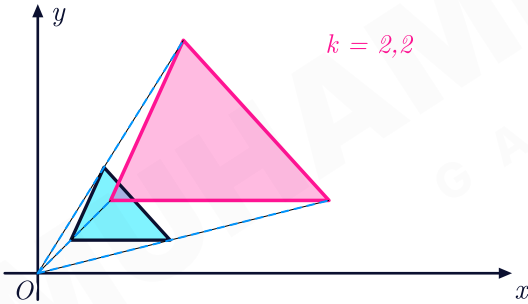
MERAKLISINA

Merkez orijin ise

$$(x, y) \rightarrow (kx, ky)$$

- $|k| > 1$ büyütme, $0 < |k| < 1$ küçültme
- Uzunluklar $|k|$, alanlar k^2 katına çıkar.

NEREDEN? Görüntü şekil öncekine benzerdir; benzerlik oranı $|k|$.



11.4 Benzerlik Dönüşümü

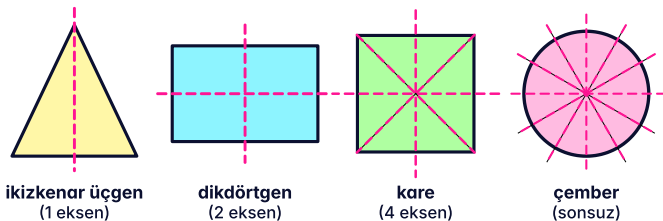
MERAKLISINA

Bir homoteti ile bir izometrinin bileşkesidir. Şekli **benzer** bir şekle dönüştürür: açılar korunur, uzunluklar oranlı değişir.

NOT Homoteti doğruları kendilerine paralel doğrulara dönüştürür.

11.5 Simetri Eksen

Şekli, katlandığında üst üste çakışan iki eş parçaya ayıran doğru.



ikizkenar üçgen
(1 eksen)

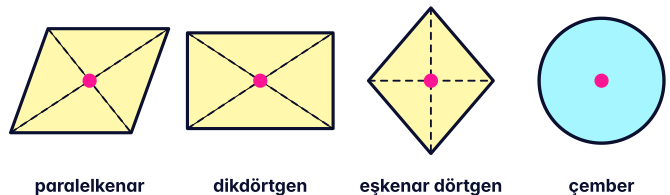
dikdörtgen
(2 eksen)

kare
(4 eksen)

çember
(sonsuz)

11.6 Simetri Merkezi

Şekil bir O noktası etrafında 180° döndürülünce kendisiyle çakışıyorsa O simetri merkezidir.



paralelkenar

dikdörtgen

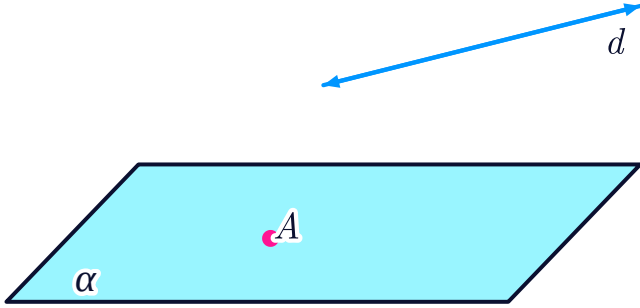
eşkenar dörtgen

çember

12. DURAK UZAYDA TEMEL KAVRAMLAR

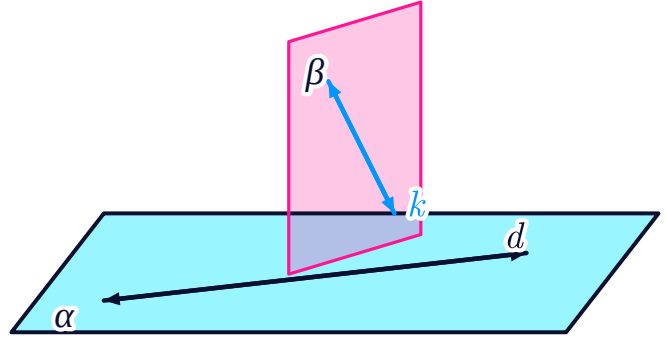
12.1 Nokta, Doğru, Düzlem

Uzayın temel elemanlarıdır. Düzlemler α, β, π gibi harflerle gösterilir. Doğrusal olmayan üç nokta bir düzlem belirtir.



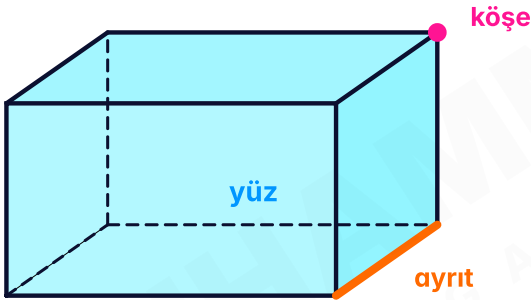
12.2 Aykırı Doğrular

Aynı düzlemde bulunmayan, dolayısıyla kesişmeyen ve paralel olmayan doğrulara **aykırı doğrular** denir.



12.3 Çokyüzlünün Elemanları

Yüz: düzlemsel bölgeler **Ayrıt:** iki yüzün ortak kenarı
Köşe: ayrıtların birleştiği nokta



12.4 Euler Bağıntısı

Dışbükey çokyüzlülerde köşe (K), ayrit (A) ve yüz (Y) sayıları arasında:

$$K - A + Y = 2$$

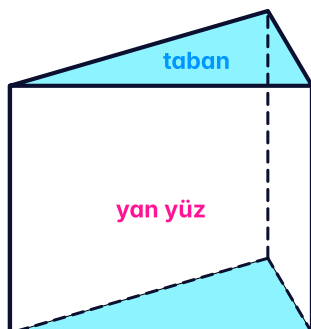
Cisim	K	A	Y
Küp	8	12	6
Üçgen prizma	6	9	5
Kare piramit	5	8	5
Düzgün dörtyüzlü	4	6	4

ISVİÇRE Leonhard Euler (1750): hangi dışbükey çokyüzlüyü alırsanız alın $K - A + Y$ hep 2 çıkar. Bir köşe kesilip atılsa bile denge bozulmaz.

12.5 Prizma

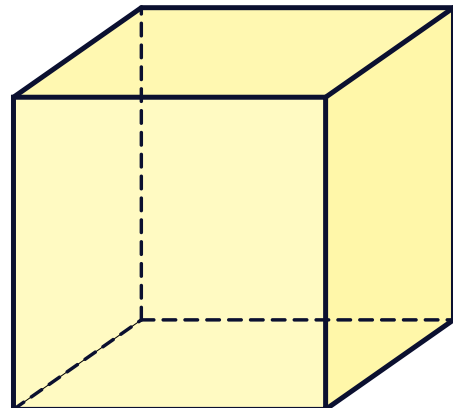
Eş ve paralel iki çokgen **taban** ile bunların karşılıklı kenarlarını birleştiren paralelkenar **yan yüzlerden** oluşan cisimdir. Yan ayrıtlar tabana dikse **dik prizma**dır.

NOT n -gen prizma: $2n$ köşe, $3n$ ayrit, $n + 2$ yüz



12.6 Küpün Elemanları

Küpün **6 yüzü**, **12 ayritı** ve **8 köşesi** vardır; tüm yüzleri eş karedir.



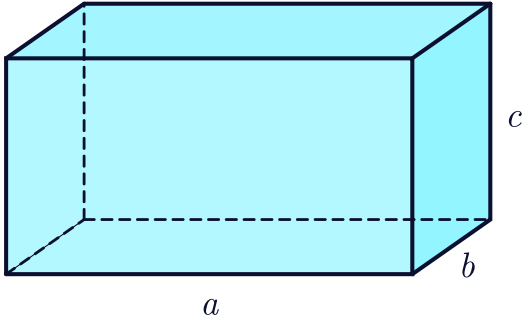
12. DÜRAK DİKDÖRTGENLER PRİZMASI VE KÜP

12.1 Dikdörtgenler Prizması

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$A_T = 2(ab + ac + bc)$$

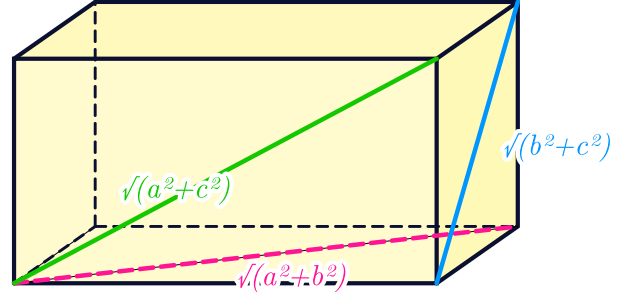
NEREDEN? Hacim: tabana $a \cdot b$ birim küp sığar, c kat üst üste konur. Alan: karşılıklı eş üç çift dikdörtgen.



12.2 Yüz Köşegenleri

Her yüzün köşegeni, o yüzün iki ayrıtıyla Pisagor'dan bulunur:

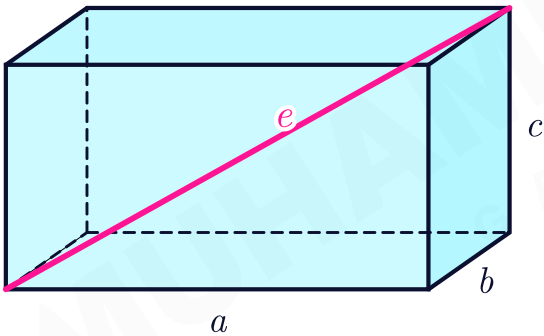
$$\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 + c^2}, \sqrt{b^2 + c^2}$$



12.3 Cisim Köşegeni

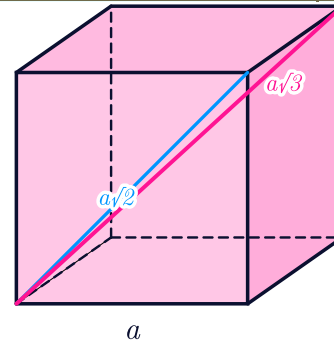
$$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

NEREDEN? Önce taban köşegeni $\sqrt{a^2 + b^2}$, sonra bu köşegen ile yükseklik c arasında ikinci kez Pisagor.



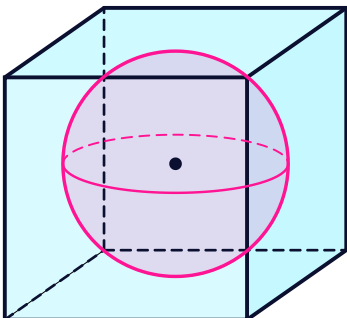
12.4 Küp

	Formül
Hacim	a^3
Toplam alan	$6a^2$
Yüz köşegeni	$a\sqrt{2}$
Cisim köşegeni	$a\sqrt{3}$



12.5 Küpün İç ve Dış Küresi

- İç teğet küre: $r = \frac{a}{2}$
- Ayrıtlara teğet küre: $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
- Dış (çevrel) küre: $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



12.6 Çözüm İpucu

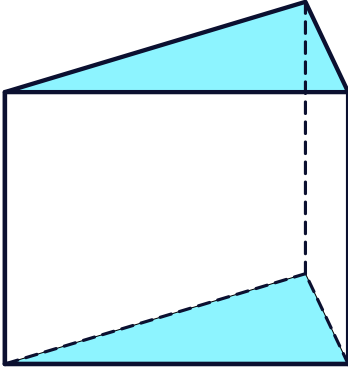
- Uzay sorularının çoğu, art arda uygulanan **Pisagor** teoremine indirgenir.
- Yüz köşegeni, cisim köşegeni ve ayrıtı karıştırma.
- Alan birimi kare (cm^2), hacim birimi küp (cm^3).

12. DURAK PRİZMALARDA ALAN VE HACİM

12.1 Dik Prizma

Yan ayrıtları tabana dik olan prizmadır; yan yüzleri dikdörtgendir.

$$A_{\text{yanal}} = \text{Ç}_{\text{taban}} \cdot h$$

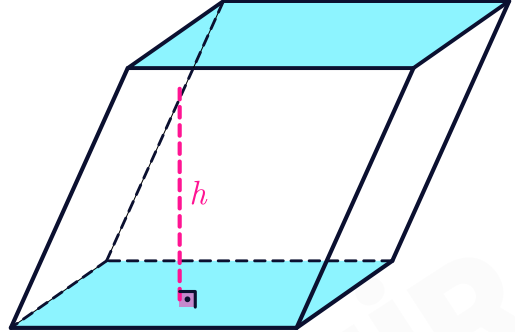


12.2 Hacim (Dik ve Eğik)

G : taban alanı, h : tabanlar arası **dik** uzaklık

$$V = G \cdot h$$

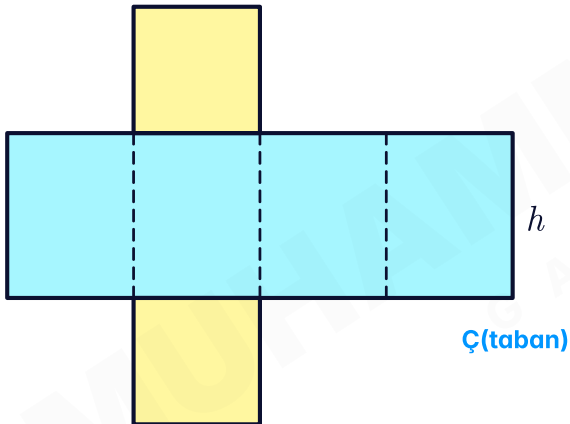
DİKKAT Eğik prizma da h , yan ayrıt değil, iki taban arasındaki dik uzaklıktır.



12.3 Toplam Alan

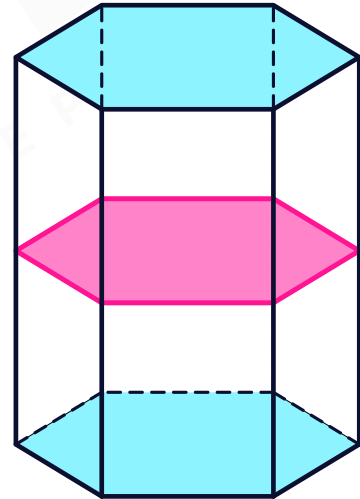
$$A_T = 2G + A_{\text{yanal}}$$

Dik prizmanın açılımı: iki taban + yan yüzlerin oluşturduğu tek bir dikdörtgen.



12.4 Tabana Paralel Kesit

Prizma tabana paralel bir düzlemle kesilirse kesit **tabana eş** bir çokgendir.



12.5 Özel Prizmalar

Taban	Taban alanı G
Eşkenar üçgen (a)	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Kare (a)	a^2
Düzgün altıgen (a)	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

NOT Hacim her durumda $G \cdot h$.

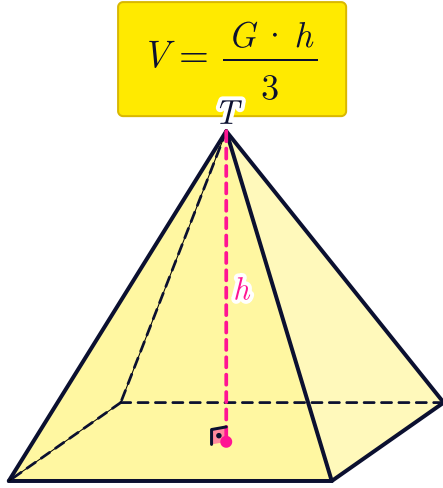
12.6 Hızlı Hatırlatma

- h her zaman tabanlar arası **dik** uzaklıktır.
- Kesitin şekli, kesen düzlemin konumuna bağlıdır.
- Birimler: alan kare, hacim küp birimdir.

12. DURAK PİRAMİTLER

12.1 Piramit ve Hacmi

Bir çokgen taban ile taban düzlemi dışındaki bir T noktasının birleştirilmesiyle oluşur.

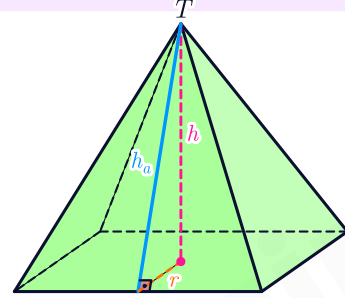


12.2 Düzgün Piramit

Tabanı düzgün çokgen olan ve tepe noktasının dik izdüşümü tabanın merkezine düşen piramittir. Yan yüzleri eş ikizkenar üçgenlerdir.

$$A_{\text{yanal}} = \frac{G_{\text{taban}} \cdot h_a}{2}$$

NEREDEN? Yan yüzler, tabanı taban kenarı ve yüksekliği h_a olan eş üçgenlerdir.

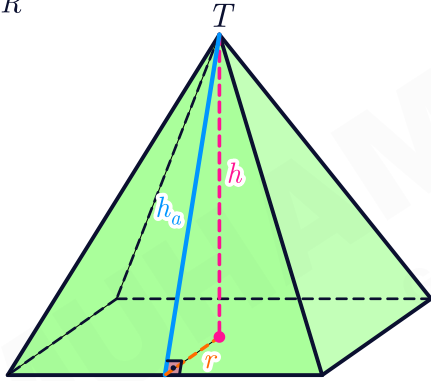


12.3 Apotem Bağintısı

h_a : yan yüz yüksekliği (apotem), r : tabanın iç teğet çember yarıçapı

$$h_a^2 = h^2 + r^2$$

Yan ayrıt ℓ , tabanın çevrel çember yarıçapı R ise $\ell^2 = h^2 + R^2$



12.4 Toplam Alan

$$A_T = G + A_{\text{yanal}}$$

İPUCU Aynı taban ve yükseklikteki prizmanın

hacminin $\frac{1}{3}$ 'ü: $V_{\text{piramit}} = \frac{1}{3} V_{\text{prizma}}$

NEREDEN? Bir küp, merkezinden köşelere çizilen doğrularla tabanı küpün bir yüzü olan **6 eş**

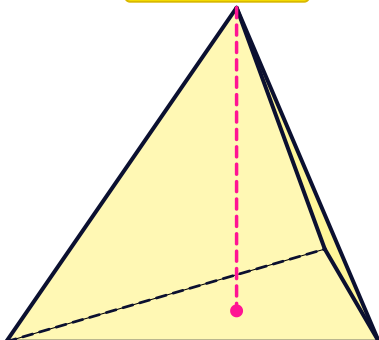
piramide ayrılır: $\frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2}$.

12.5 Düzgün Dört yüzlü

Dört yüzü de eşkenar üçgen olan piramittir (ayrıt a).

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$A_T = a^2\sqrt{3}$$

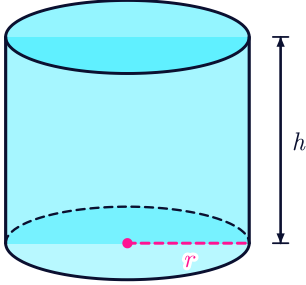


12.6 Dikkat

- Yükseklik (h), apotem (h_a) ve yan ayrıt (ℓ) farklı uzunluklardır.
- Hacimde $\frac{1}{3}$ yalnız **piramit** ve **konide** vardır.
- Tepe noktasının izdüşümü düzgün piramitte tabanın merkezidir.

12. DURAK SİLİNDİR VE KONİ

12.1 Dik Dairesel Silindir

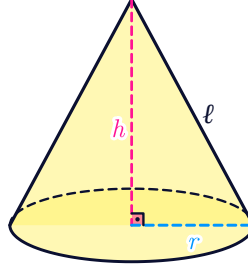


$$V = \pi r^2 h$$

$$A_{\text{yanal}} = 2\pi r h$$

$$A_T = 2\pi r(r + h)$$

12.2 Dik Dairesel Koni



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$A_{\text{yanal}} = \pi r l$$

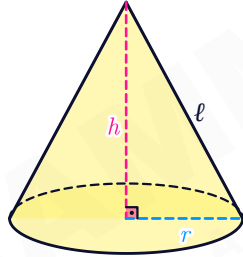
$$A_T = \pi r(r + l)$$

12.3 Ana Doğru Bağintısı

Koninin ana doğrusu (yan uzunluğu) ℓ :

$$\ell^2 = h^2 + r^2$$

İPUCU Yükseklik, yarıçap ve ana doğru bir dik üçgen oluşturur.



12.4 Koninin Açınımı

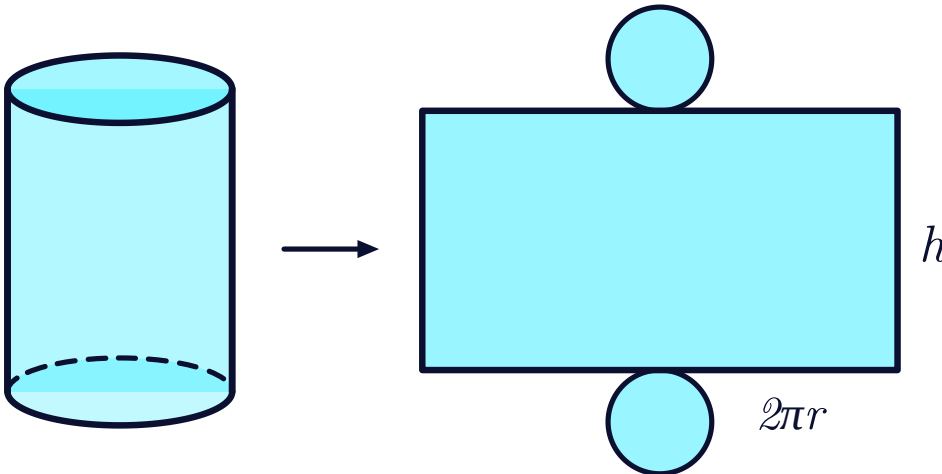
Yanal yüz, yarıçapı ℓ olan bir daire dilimidir. Yay uzunluğu taban çevresine eşittir:

$$2\pi r = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \ell \Rightarrow \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{r}{\ell}$$

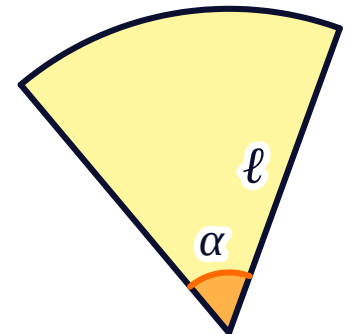
NEREDEN? Koni kâğıttan yapılırken dilimin yay kenarı, tabandaki çemberin etrafını tam bir kez sarar.

12.5 Açınımlar

Silindirin yanal yüzü $2\pi r \times h$ boyutlu bir dikdörtgendir; koninin yanal yüzü bir daire dilimidir.



silindir açınımı



koninin yanal yüzü

12. DURAK KÜRE VE KÜRE KESİTLERİ

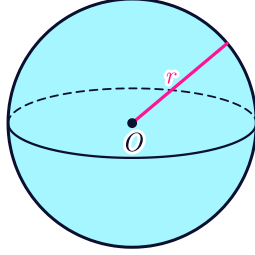
12.1 Küre

Uzayda sabit bir noktaya (O) eşit uzaklıktaki noktaların kümesidir.

$$A = 4\pi r^2$$

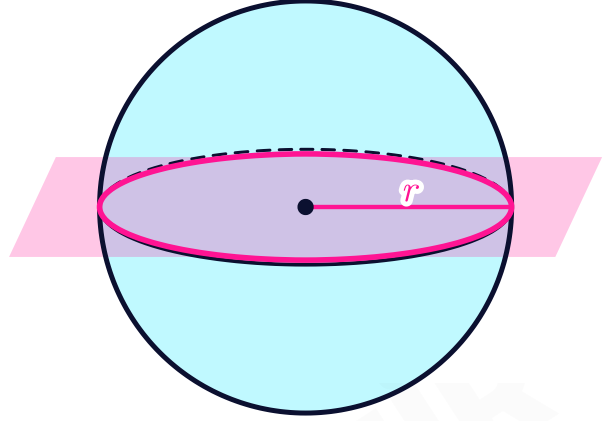
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

İPUCU Kürenin yüzeyi, aynı yarıçaplı **dört** dairenin alanı kadardır.



12.2 Büyük Çember

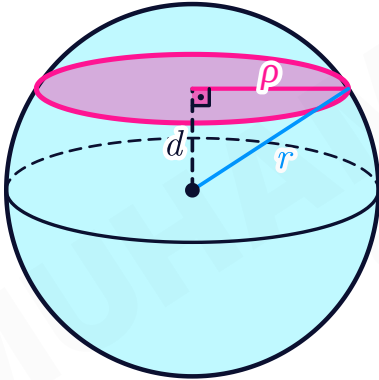
Merkezden geçen düzlemin küreyi kestiği çemberdir; yarıçapı kürenin yarıçapına eşittir. En büyük kesit budur.



12.3 Düzlemsel Kesit

Merkezden d uzaklıktaki düzlemin oluşturduğu kesit bir dairedir; yarıçapı

$$\rho = \sqrt{r^2 - d^2}$$

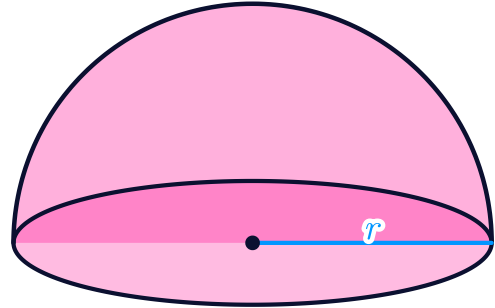


12.4 Yarım Küre

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$A_T = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$$

(eğri yüzey + taban dairesi)



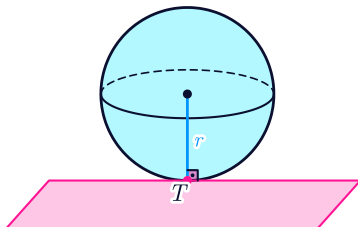
12.5 Teğet Düzlem

Küreye bir noktada değen düzlem, değme noktasındaki yarıçapa diktir.

İPUCU Silindir içine yerleştirilmiş küre (çap = yükseklik):

$$V_{\text{küre}} = \frac{2}{3} V_{\text{silindir}}$$

ESKİ YUNAN Arşimet bu buluşu ($V_{\text{küre}} = \frac{2}{3} V_{\text{silindir}}$) o kadar sevmişti ki mezar taşına silindir içinde küre çizilmesini istedi.



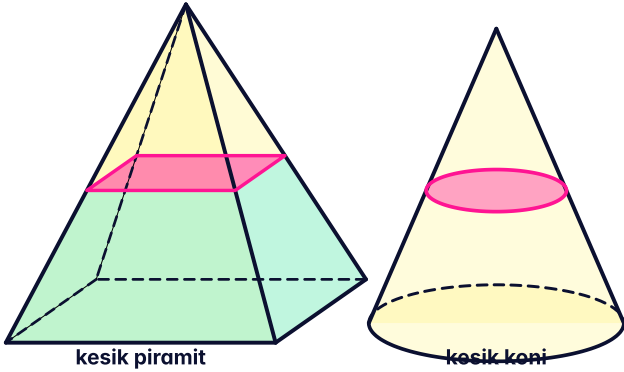
12.6 Özet

Cisim	Hacim	Alan
Küre	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$
Yarım küre	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$3\pi r^2$
Silindir	$\pi r^2 h$	$2\pi r(r + h)$
Koni	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$\pi r(r + \ell)$

12. DURAK KESİK PİRAMİT VE KESİK KONI

12.1 Oluşum

Piramit ya da koni, tabanına paralel bir düzlemle kesilince tabanla kesit arasında kalan cisimdir. Kesit, tabana benzerdir.



12.2 Kesik Piramit Hacmi

G_1 , G_2 : alt ve üst taban alanları, h : yükseklik

$$V = \frac{h}{3} (G_1 + G_2 + \sqrt{G_1 G_2})$$

ESKİ MİSİR Bu formül Moskova Matematik Papirüsü'nde (MÖ 1850) kare tabanlı kesik piramit için hesaplanmış olarak yer alır; bilinen en eski hacim hesaplarından biridir.

12.3 Düzgün Kesik Piramit

ζ_1 , ζ_2 : taban çevreleri, h_a : yan yüz (yamuk) yüksekliği

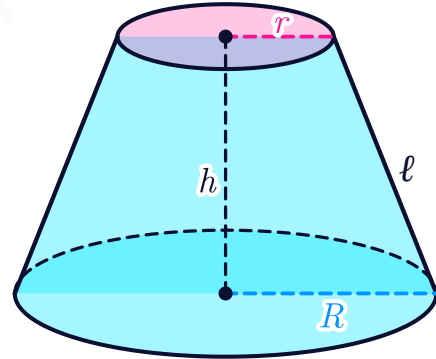
$$A_{\text{yanal}} = \frac{(\zeta_1 + \zeta_2) \cdot h_a}{2}$$

NEREDEN? Yan yüzler, yüksekliği h_a olan eş yamuklardır.

12.4 Kesik Koni Hacmi

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

NEREDEN? Kesik piramit formülünde $G_1 = \pi R^2$, $G_2 = \pi r^2$ yazılır.



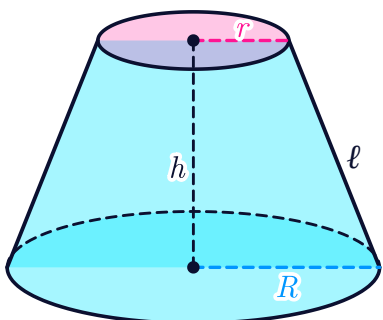
12.5 Kesik Koni Alanları

ℓ : ana doğru parçası

$$A_{\text{yanal}} = \pi(R + r)\ell$$

$$A_T = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi(R + r)\ell$$

$$\ell^2 = h^2 + (R - r)^2$$



12.6 Benzerlikten Çıkarım

Kesik cisim = büyük cisim – kesilen küçük (benzer) cisim:

$$V_{\text{kesik}} = V_{\text{büyük}} - V_{\text{küçük}}$$

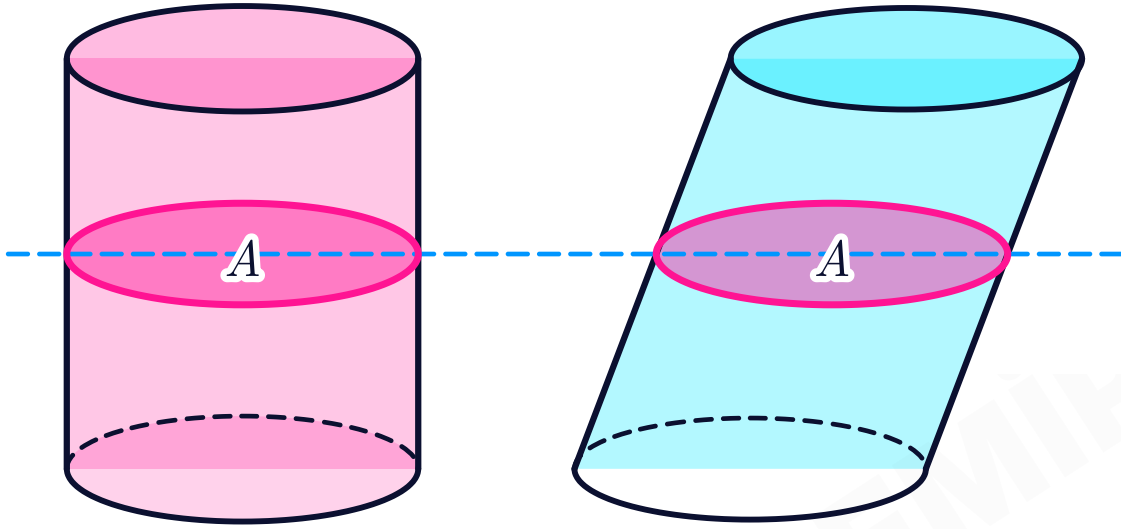
İPUCU Formül hatırlanmazsa, eksik koniyi/piramidi tamamlayıp benzerlik oranını kullan.

12. DURAK CAVALİERİ İLKESİ VE HACİM ORANLARI

12.1 Cavalieri İlkesi

Yükseklikleri eşit ve tabana paralel **her** düzlemle oluşan kesit alanları eşit olan iki cismin hacimleri eşittir.

$$V_1 = V_2$$



12.2 Neden İşe Yarar?

Eğik bir cismin hacmi, aynı taban ve yükseklikteki dik cisminkine eşittir. Bu yüzden **eğik** prizma ve silindirde de $V = G \cdot h$ kullanılır.

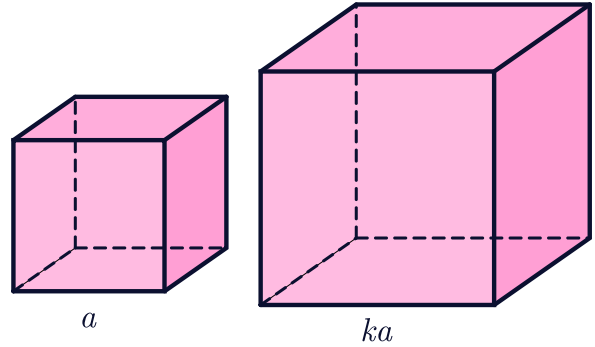
DİKKAT Yalnız yüksekliklerin eşit olması yetmez; **her seviyedeki** kesit alanları da eşit olmalıdır.

ÇİN Bu ilkeyi Çinli matematikçi **Zu Geng** (5. yüzyıl), Cavalieri'den yaklaşık 1100 yıl önce kullanmıştır; Çin'de adı 祖暅原理dir.

12.3 Benzer Cisimler

Benzerlik oranı k ise

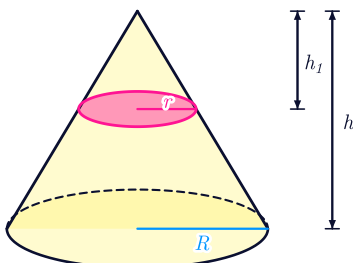
Oran	
Uzunluk	k
Alan	k^2
Hacim	k^3



12.4 Tabana Paralel Kesit

Piramit ve konide tepeden h_1 uzaklıktaki kesit, tabana benzerdir: $k = \frac{h_1}{h} = \frac{r}{R}$

$$\frac{S_{\text{kesit}}}{S_{\text{taban}}} = k^2 \quad \frac{V_{\text{küçük}}}{V_{\text{büyük}}} = k^3$$



12.5 Hızlı Hatırlatma

- Benzer cisimlerde hacim oranı k^3 , alan oranı k^2 , uzunluk oranı k .
- Kesik cisim = büyük cisim – küçük cisim.
- Bir koni yüksekliğinin ortasından kesilirse üstteki küçük koni, hacmin $\frac{1}{8}$ 'idir.

13. DURAK

SİNÜS VE KOSİNÜS TEOREMİ

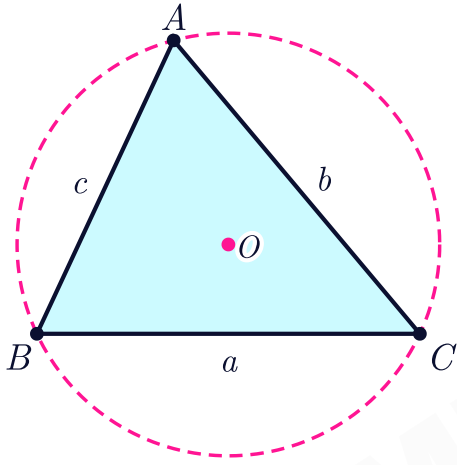
MERAKLISINA

13.1 Sinüs Teoremi

R : çevrel çemberin yarıçapı

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

NEREDEN? B 'den çap çizilir; A ile aynı yayı gören çevre açısı, hipotenüsü $2R$ olan dik üçgende yer alır: $\sin A = \frac{a}{2R}$.

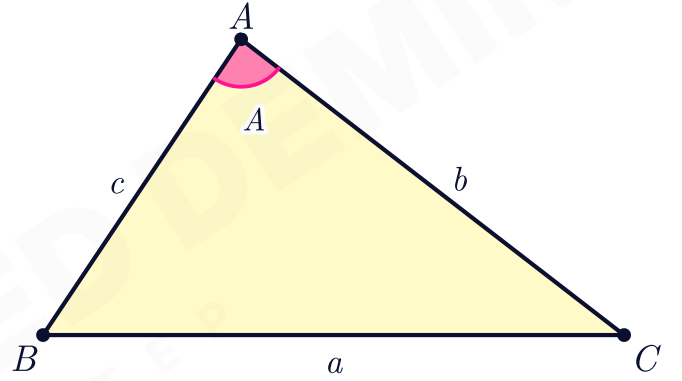


13.2 Kosinüs Teoremi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

NOT $A = 90^\circ$ ise $\cos A = 0$: Pisagor teoremi elde edilir. Pisagor, kosinüs teoreminin özel hâlidir.

NEREDEN? C 'den AB 'ye yükseklik indirilir; iki dik üçgende Pisagor yazılır ve izdüşüm $b \cos A$ olarak konur.



13.3 Hangisi Ne Zaman?

Verilen	Kullan
İki açı + bir kenar	Sinüs
İki kenar + karşısındaki açı	Sinüs
İki kenar + aradaki açı	Kosinüs
Üç kenar (açı aranıyor)	Kosinüs

13. DURAK CEVA VE MENELAUS

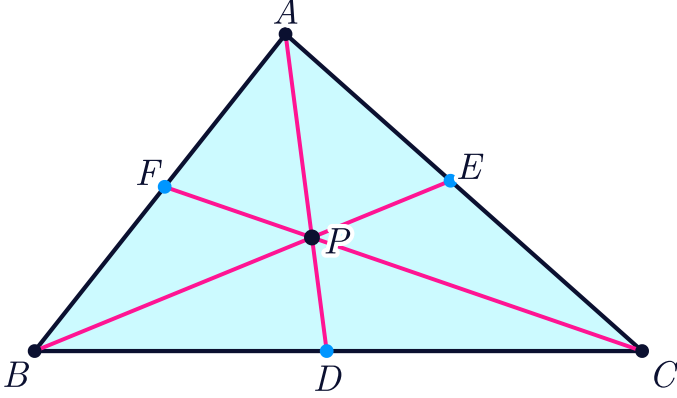
MERAKLISINA

13.1 Ceva Teoremi

$D \in [BC]$, $E \in [CA]$, $F \in [AB]$. AD , BE , CF bir noktada kesişir $\Leftrightarrow$

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1$$

NEREDEN? Her oran, P ile oluşan üçgenlerin alan oranına çevrilir; çarpımda alanlar sadeleşir.

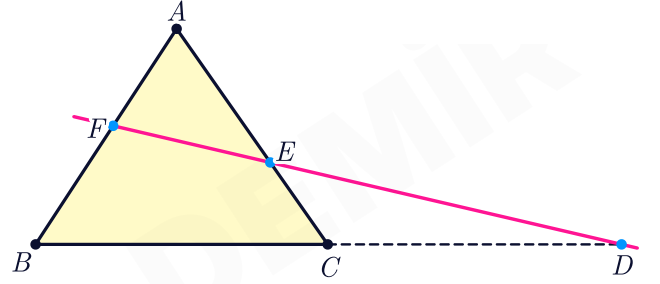


13.2 Menelaus Teoremi

Bir doğru **iki kenarı** içten ($F \in [AB]$, $E \in [AC]$), üçüncü kenarın **uzantısını** (D) keserse

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1$$

NEREDEN? C 'den kesen doğruya paralel çizilir; iki temel orantı yazılıp çarpılır.



13.3 Kesen Doğru Hakkında

Köşelerden geçmeyen bir doğru üçgeni ya **iki kenardan içten + bir uzantıdan** ya da **üç uzantıdan** keser.

DİKKAT Bir doğru üç kenarı birden içten kesemez; tek kenarı içten kesip diğer ikisini uzantıdan da kesemez.

13.4 Oran Yazma Zinciri

Bir köşeden başla, kenar üzerindeki noktaya, sonra öbür köşeye geç; başladığın köşeye dönünce dur:

$$B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow B$$

İPUCU Her oranın payı ve paydası aynı kenar (ya da uzantısı) üzerindedir.

ABD Amerikan olimpiyat hazırlığında Menelaus çoğu zaman **kütle noktası (mass points)** yöntemiyle çözülür: köşelere ağırlık verilip denge kuralı uygulanır.

13. DURAK STEWART VE CARNOT

MERAKLISINA

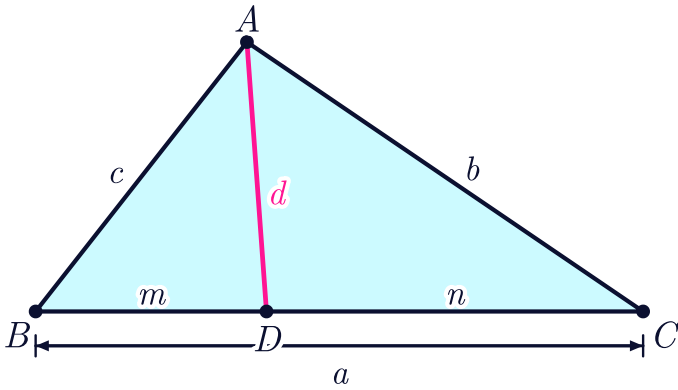
13.1 Stewart Teoremi

$D \in [BC]$, $|BD| = m$, $|DC| = n$, $a = m + n$, $|AD| = d$:

$$b^2 \cdot m + c^2 \cdot n = a(d^2 + m \cdot n)$$

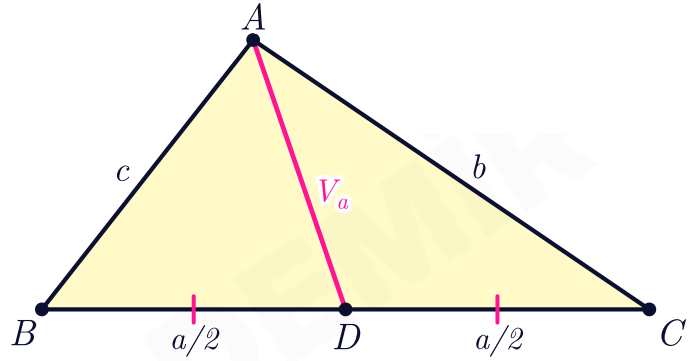
NEREDEN? ABD ve ADC 'de D açıları bütündür; iki kosinüs teoremi yazılıp $\cos$ terimi yok edilir.

ABD Ezber cümlesi: "**A** man and his dad put a bomb in the sink" $\rightarrow man + dad = bmb + cnc$, yani $a \cdot m \cdot n + a \cdot d^2 = b^2m + c^2n$.



13.2 Stewart'ın Özel Hâlleri

- Kenarortay ($m = n$): $b^2 + c^2 = 2V_a^2 + \frac{a^2}{2}$
- İç açıortay ($\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$): $n_A^2 = bc - mn$
- İkizkenar ($b = c$): $d^2 = b^2 - mn$

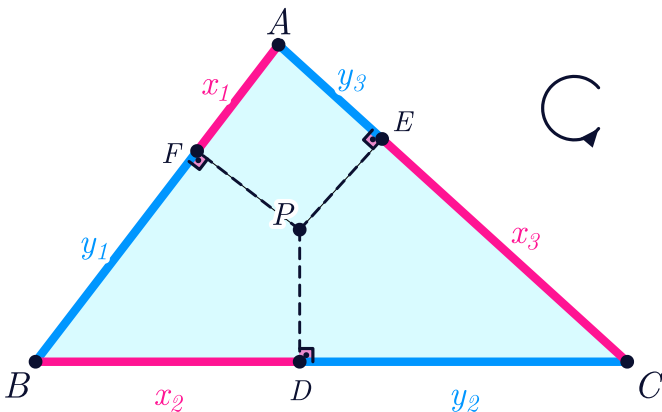


13.3 Carnot Teoremi

P 'den kenarlara dikmeler indirilir; ayaklar (D, E, F) her kenarı iki parçaya ayırır. $A \rightarrow B \rightarrow C$ yönünde dolaşınca parçalar sırayla $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ olur:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

NEREDEN? Ortak dikme $|PF|$ olduğundan $|PA|^2 - |PB|^2 = x_1^2 - y_1^2$. Aynı şekilde $|PB|^2 - |PC|^2 = x_2^2 - y_2^2$ ve $|PC|^2 - |PA|^2 = x_3^2 - y_3^2$. Üçü toplanınca sol taraf 0 olur.

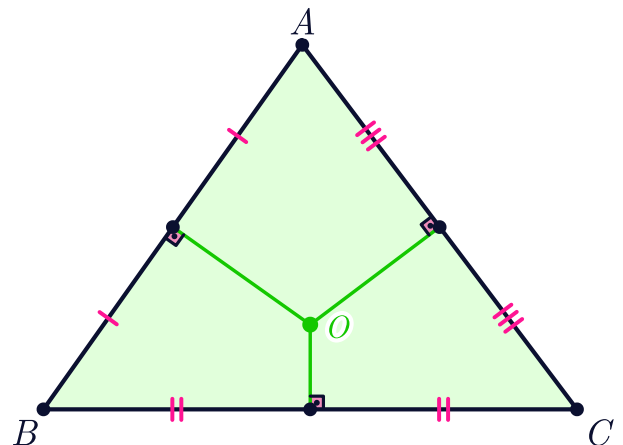


13.4 Carnot'nun Tersı

$D \in [BC]$, $E \in [CA]$, $F \in [AB]$ noktaları yukarıdaki eşitliği sağlıyorsa, bu noktalarda kenarlara çıkılan dikmeler **bir noktada kesişir**.

İPUCU Kenar orta dikmelerinde her kenarda $x = y$ olduğundan eşitlik kendiliğinden sağlanır; bu yüzden üç orta dikme tek noktada (O) kesişir.

NEREDEN? D ve E 'deki dikmeler Q 'da kesişsin; Q 'nun AB 'ye dikme ayağı F' olsun. Carnot'a göre $|AF|^2 - |FB|^2 = |AF'|^2 - |FB'|^2$; bu fark $[AB]$ üzerinde tek noktada bu değeri alır, yani $F = F'$.



13. DURAK EULER DOĞRUSU, DOKUZ NOKTA, DIŞ TEĞET ÇEMBER

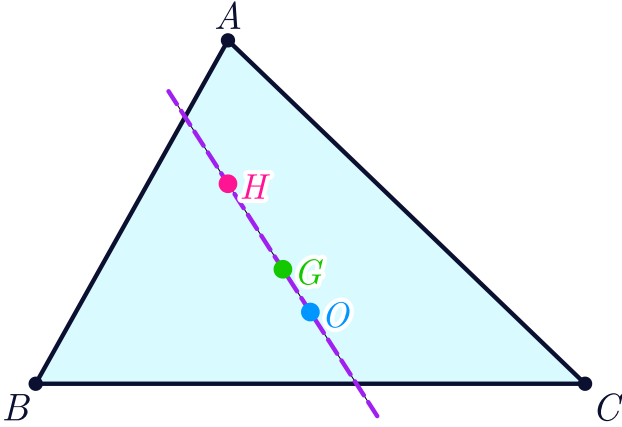
MERAKLISINA

13.1 Euler Doğrusu

Eşkenar olmayan üçgende O , G , H doğrusaldır ve

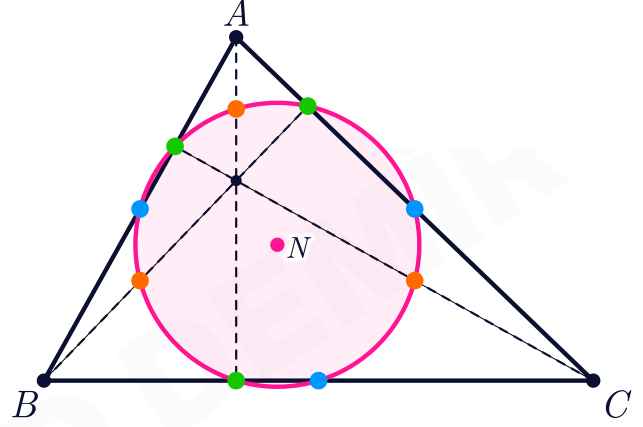
$$|OG| : |GH| = 1 : 2$$

NEREDEN? O merkezli, $-\frac{1}{2}$ oranlı homoteti üçgeni orta noktalar üçgenine götürür; H 'yi O 'ya taşır.



13.2 Dokuz Nokta Çemberi

- kenar orta noktaları
 - yükseklik ayakları
 - $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$ 'nin orta noktaları
- aynı çemberdedir. Merkezi $[OH]$ 'nin orta noktası, yarıçapı $\frac{R}{2}$.

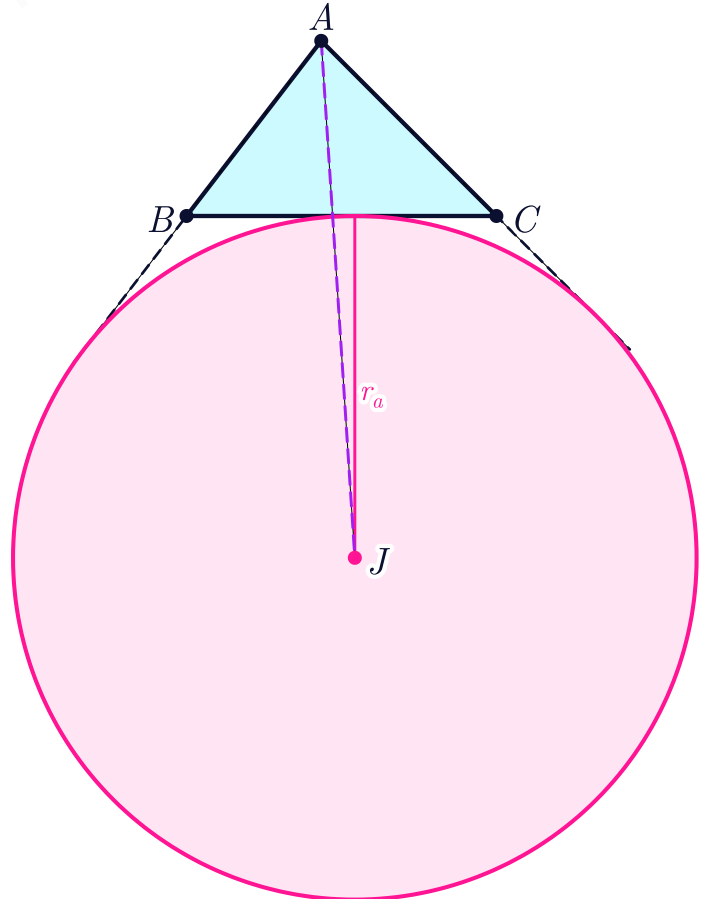


13.3 Dış Teğet Çember

Bir iç açkırtay (A) ile iki dış açkırtay (B , C) bir noktada (J) kesişir. J , BC kenarına ve öbür kenarların uzantılarına teğet çemberin merkezidir.

$$A = r_a(u - a)$$

NEREDEN? J üç açkırtayın her birinde olduğundan üç doğruya da eşit uzaklıktadır (r_a).



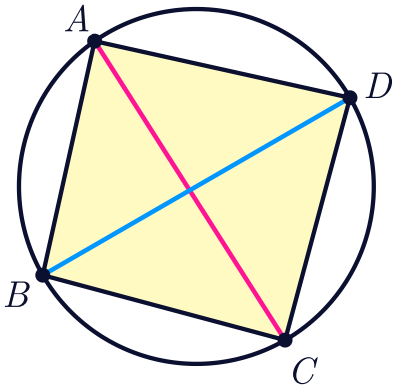
13.1 Ptolemaios Teoremi

Kirişler dörtgeninde:

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$$

NEREDEN? Köşegen üzerinde bir nokta seçilip iki benzer üçgen çifti oluşturulur; oranlar toplanır.

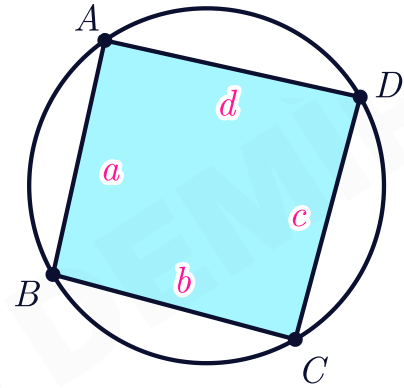
ESKİ YUNAN İskenderiyeli Ptolemaios (MS 150), bu teoremi giriş tabloları (ilk trigonometri tabloları) hazırlamak için kullandı.

**13.2 Brahmagupta Formülü**

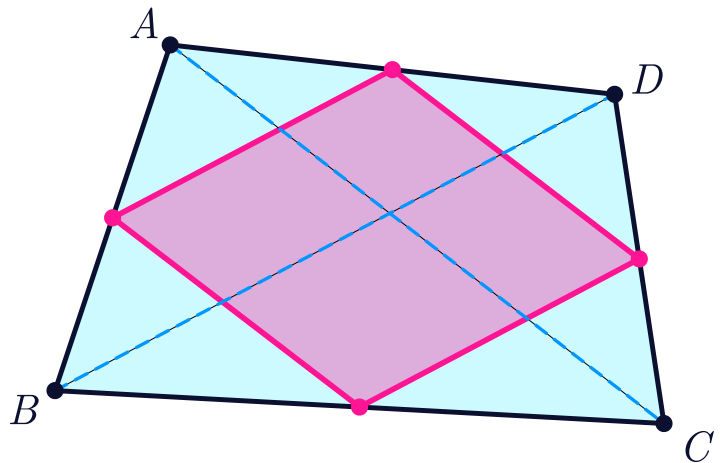
Kirişler dörtgeninde, $u = \frac{a+b+c+d}{2}$:

$$A = \sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}$$

HINDİSTAN Brahmagupta (MS 628) bu formülü yazdı. $d = 0$ alınca Heron formülü çıkar: üçgen, bir kenarı sıfır olan girişler dörtgenidir.

**13.3 Varignon Teoremi**

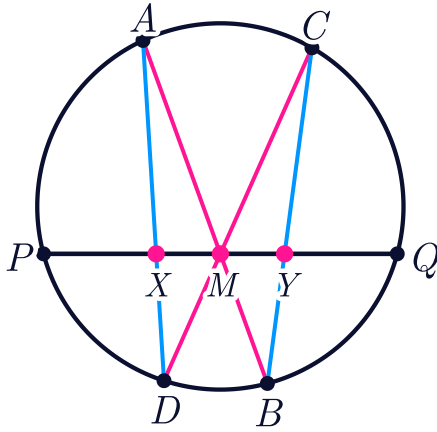
Her dörtgende kenar orta noktaları **paralelkenar** oluşturur; alanı dörtgenin yarısı, çevresi köşegenler toplamıdır.



13.1 Kelebek Teoremi

M , $[PQ]$ kirisinin orta noktası. M 'den geçen $[AB]$ ve $[CD]$ kirisleri çizilir; $[AD]$ ve $[CB]$, PQ 'yu X ve Y 'de keser.

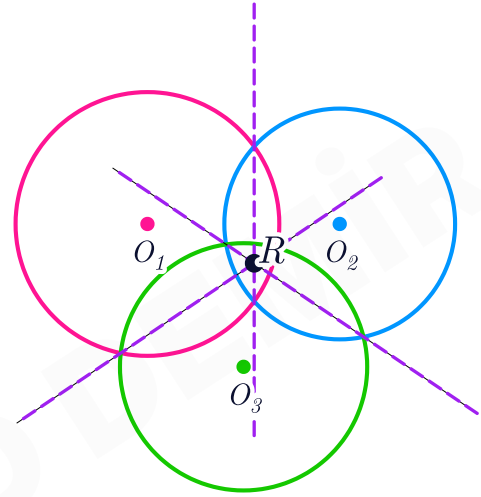
$$|MX| = |MY|$$

**13.2 Radikal Merkez**

Merkezleri doğrusal olmayan üç çemberin ikişerli radikal eksenleri tek noktada (R) kesişir; R 'nin üç çembere göre kuvveti eşittir.

DİKKAT Merkezler doğrusal ise radikal eksenler **paraleldir**, kesişmez.

NEREDEN? R , birinci ve ikinci çember için kuvvetleri eşitler; ikinci ve üçüncü için de eşitler, o hâlde birinci ve üçüncü için de eşittir.

**13.3 Meraklısına: Hangi Teorem Nerede?**

Teorem	Geçerli olduğu şekil	İşe yaradığı yer
Ceva	Üçgen + bir noktada kesişen üç doğru	kesişimi göstermek, oran
Menelaus	Üçgen + bir kesen doğru	doğrusallık, oran
Stewart	Üçgen + bir köşe-kenar doğru parçası	uzunluk
Ptolemaios	Kirişler dörtgeni	köşegen uzunluğu
Brahmagupta	Kirişler dörtgeni	alan
Pitot	Teğetler dörtgeni	kenar toplamaları
Varignon	Her dörtgen	orta noktalar
Kelebek	Çember + kirisin orta noktası	eş parçalar

A-Z DİZİN

A

AA Benzerliği	15
Açılarına Göre Üçgenler	9
Açınımlar	58
Açıortay	21
Açıortayların Oluşturduğu Açılar	11
Açıortay Denklemleri	49
Açıortay Denklemleri ve Geometrik Yer	49
Açıortay Özelliği	21
Açıortay Uzunluğu	21
Açı Çeşitleri	7
Açı İkili	7
Açı Kovalama Yöntemi	10
Açı Sıralamasından Kenar Sıralamasına	13
Açı ve Ölçüsü	6
Açı, Köşe ve Kollar	6
Ağırlık Merkezi	46
Ağırlık Merkezinin Koordinatları	22
Ağırlık Merkezi G	24
Ağırlık Merkezi (G)	22
AKA ve AAK Eşliği	14
Alan	32
Alanı Eşit Bölen Paralel	30
Alan Bağıntısı	18
Alan Oranları	26
Altıgende Köşegenler	28
Altı Eş Alan	22
Analitik Düzlem ve Bölgeler	45
Ana Doğru Bağıntısı	58
Anne-Yavru Modeli	16
Apotem Bağıntısı	57
Aykırı Doğrular	54
Aynı Açılı Dilimler	44
Aynı Kenarı Gören Açılar	42
Aynı Köşedeki İç ve Dış Açıortay	11
Aynı Taban, Paralel Tepe	26
Aynı Yayı Gören Çevre Açılar	37

B

Benzerlikten Çıkarım	60
Benzerlikte Oranlar	15
Benzerlik Dönüşümü	53
Benzerlik Modelleri: Thales ve Akrabaları	16
Benzer Cisimler	61
Benzer Üçgenlerde Alan	26

Beş Köşeli Yıldız	10
Birbirine Teğet İki Çemberin Ortak Teğeti	39
Bir Doğruya Sabit Uzaklık	49
Bir İç, Bir Dış Açıortay	11
Bir Noktadan Geçen Kirişler	36
Bir Noktaya Sabit Uzaklık	49
Bölme, Alan ve Ağırlık Merkezi	46
Brahmagupta Formülü	66
Büyük Açı – Büyük Kenar	12
Büyük Çember	59

C

Carnot Teoremi	64
Carnot'nun Ters	64
Cavalieri İlkesi	61
Cavalieri İlkesi ve Hacim Oranları	61
Ceva Teoremi	63
Ceva ve Menelaus	63
Cisim Köşegeni	55

Ç

Çapı Gören Çevre Açı	37
Çemberde Açılar (1): Merkez, Çevre, Teğet–Kiriş	37
Çemberde Açılar (2): İç Açı ve Dış Açı	38
Çemberde Temel Kavramlar ve Gösterim	35
Çemberde Uzunluk: Noktanın Kuvveti	40
Çembere Teğet ve Radikal Eksen	51
Çemberin Analitik İncelenmesi	50
Çemberin Çevresi	43
Çember, Merkez, Yarıçap, Çap	35
Çevrel Çemberle	25
Çevrel Çember Merkezi O	24
Çevre Açı	37
Çevre, Yay Uzunluğu, Dilim ve Parça	43
Çokgenler	27
Çokyüzlünün Elemanları	54
Çözüm İpucu	55

D

Dairede Alan	44
Daire Dilimi Alanı	43
Daire Halkası	44
Daire Parçası Alanı	43
Daire, Dilim, Parça	35
Dar Açı	7

Deltoid	34
Derece	6
Derece – Radyan Dönüşümü	6
Dıştan Ayırık	41
Dıştan Bölme	46
Dıştan Teğet	41
Dış Açı	9, 42
Dış Açılar Toplamı	9, 27
Dış Açıortay Teoremi	21
Dış Açı (iki Kesen)	38
Dış Noktadan Teğetler	39
Dış Noktadan Teğet Uzunluğu	51
Dış Ortak Teğet	39
Dış Teğet Çember	65
Dış Ters Açılar	8
Dikdörtgen	33
Dikdörtgenler Prizması	55
Dikdörtgenler Prizması ve Küp	55
Dikdörtgen, Eşkenar Dörtgen, Kare	33
Diklik Merkezi H	24
Dikme Ayakları	31
Dik Açı	7
Dik Dairesel Koni	58
Dik Dairesel Silindir	58
Dik Doğrular	5
Dik Kesişen Kenarortaylar	22
Dik Prizma	56
Dik Üçgende Dar Açılar	9
Dik Üçgende HK Eşliği	14
Dik Üçgende İç Teğet Çember	20
Dik Üçgende Kenarortaylar	20
Dik Üçgende Trigonometri ve Ek Bağlantılar	20
Dik Üçgen: Pisagor ve Öklid	18
Dik Yamuk	31
Doğru	4
Doğrulara Göre Yansıma	52
Doğrunun Denklemi	47
Doğrusallık Koşulu	46
Doğrusal Noktalar	4
Doğru Açı ve Tam Açı	7
Doğru ile Çemberin Konumu	35
Doğru Parçası	5
Doğru Parçası ve Işın	5
Doğru – Çember Konumu	50
Dokuz Nokta Çemberi	65
Dörtgenler: Genel Özellikler	29

A-Z DİZİN

Düzgün Altıgen	28	İçten Teğet	41	Kenarortay Uzunluğu	22
Düzgün Çokgen	27	İçte Kesişen Kirişler	40	Kenarortay ve Ağırlık Merkezi	22
Düzgün Çokgenler	28	İç Açılar Toplamı	9, 27	Kenar-Açı Bağlantıları	12
Düzgün Çokgen Özellikleri	28	İç Açıortay Teoremi	21	Kesen – Kesen	40
Düzgün Dörtüzlü	57	İç Açı (Kesişen Kirişler)	38	Kesik Koni Alanları	60
Düzgün Kesik Piramit	60	İç İçe	41	Kesik Koni Hacmi	60
Düzgün Piramit	57	İç Nokta	32	Kesik Piramit Hacmi	60
Düzgün Sekizgen	28	İç Noktanın Kuvveti	40	Kesik Piramit ve Kesik Koni	60
Düzlem	4	İç Nokta ile Çevre	12	Kesişen	41
Düzlemsel Kesit	59	İç Nokta: Kısa Yol	12	Kırık Çizgi Kuralı	8
E		İç Ortak Teğet	39	Kirişin Özellikleri	36
Eğim	47	İç Teğet Çemberle	25	Kirişler Dörtgeni	42
Eğimin İşareti	47	İç Teğet Çember Merkezi I	24	Kirişler Dörtgeni ve Teğetler Dörtgeni	42
Eğim – Kesişim ve Genel Denklem	47	İç Teğet Merkezi ile Alanlar	21	Kiriş Uzunluğu	36, 50
Eksenlere Teğet Çember	50	İç Ters Açılar (Z)	8	Kiriş ve Yay	35
Eksenlere Uzaklık	45	İkizkenar Üçgen	17	KKK Benzerliği	15
Eksenlere ve Orijine Göre Yansıma	52	İkizkenar ve Eşkenar Üçgen	17	KKK Eşliği	14
Eksenleri Kesen Doğru	47	İkizkenar Yamuk	31	Kolları Paralel Açılar	8
Eşkenarda İç Nokta	17	İkizkenar Yamuk ve Dik Yamuk	31	Komşu İki Açıortay	29
Eşkenar Dörtgen	33	İki Çemberin Birbirine Göre Konumları	41	Koninin Açınımı	58
Eşkenar Üçgen	17	İki Dış Açıortay	11	Koordinatlarla Üçgen Alanı	46
Eş Kiriş – Eş Yay	36	İki Doğrunun Konumu	48	Koordinat Düzleminde	53
Eş Merkezli	41	İki Doğru Arasındaki Açı	48	Koordinat Sistemi ve Nokta	45
Euler Bağlantısı	54	İki Doğru: Konum, Açı, Uzaklık	48	Korunan Özellikler	52
Euler Doğrusu	65	İki İç Açıortay	11	Kosinüs Teoremi	62
Euler Doğrusu, Dokuz Nokta, Dış Teğet Çember	65	İki Kenar ve Aradaki Açı	25	Köşegenler	32
G		İki Noktaya Eşit Uzaklık	49	Köşegenleri Dik Dik Yamuk	31
Genel Alan Formülleri	28	İki Nokta Arası Uzaklık	45	Köşegenleri Dik Dörtgen	29
Genel Denklem	50	İki Teğet	38	Köşegenleri Dik İkizkenar Yamuk	31
Geniş Açı	7	İngiliz Bayrağı Teoremi	33	Köşegenlerle Alan	29
H		K		Köşegenlerle Ayrılan Alanlar	29, 30
Hacim (Dik ve Eğik)	56	KAK Benzerliği	15	Köşegen Bağlantısı	32
Heron Formülü (Üç Kenar)	25	KAK Eşliği	14	Köşegen Kesiminden Geçen Paralel	30
Hipokrat'ın Ayları	44	Kare	33	Köşegen Özellikleri	34
Homoteti	53	Karede Yarım Açı	33	Köşegen Sayısı	27
Homoteti ve Simetri	53	Karşı Durumlu Açılar (U)	8	Küçük Çembere Teğet Kiriş	44
I		Kelebek Teoremi	67	Küp	55
Işın	5	Kelebek Teoremi ve Radikal Merkez	67	Küpün Elemanları	54
i		Kelebek (Papyon) Şekli	10	Küpün İç ve Dış Küresi	55
İçbükey Çokgenlerde De Geçerli	27	Kelebek (X Modeli)	16	Küre	59
İçten Bölme	46	Kenardaki Nokta	32	Küre ve Küre Kesitleri	59
		Kenarlardan Açı Türü	12	M	
		Kenarlarına Göre Üçgenler	9	Menelaus Teoremi	63
		Kenarortayın Orta Noktası	26	Merkezden Kirişe Dikme	36
		Kenarortay ile Yükseklik Arası	22	Merkeze Uzaklık ve Kiriş Boyu	36
		Kenarortay Sınırı	13		

A-Z DİZİN

Merkezi Orijinde	50	Prizma	54	U	
Merkezlerin Yeri	24	Prizmalarda Alan ve Hacim	56	Uzayda Temel Kavramlar	54
Merkez Açısı	37	Ptolemaios Teoremi	66	Uzunluk Sınırları ve Sıralamalar	13
N		Ptolemaios, Brahmagupta, Varignon	66	Ü	
Nokta	4	R		Üçgende Açılar: Temel Kurallar	9
Noktadan Doğruya Uzaklık	48	Radikal Eksen	51	Üçgende Alan Formülleri	25
Noktanın Kuvveti (Tek Formül)	40	Radikal Merkez	67	Üçgende Dört Merkez	24
Nokta Gösterimi	45	Radyan	6	Üçgende Özel Açısı Şekilleri	10
Nokta – Eğim ve İki Nokta Formu	47	Refleks Açısı	7	Üçgenlerde Benzerlik	15
Nokta, Doğru, Düzlem	54	S		Üçgenlerde Eşlik	14
O		Silindir ve Koni	58	Üçgen Eşitsizliği	12
Ok (Bumerang) Şekli	10	Simetri Ekseni	53	Üç Benzer Üçgen	18
Oranın İşareti	53	Simetri Merkezi	53	V	
Orijine Uzaklık	45	Sinüs Teoremi	62	Varignon Paralelkenarı	29
Orijin Etrafında Dönme	52	Sinüs ve Kosinüs Teoremi	62	Varignon Teoremi	66
Ortak Açılı Üçgenler	26	Standart Denklem	50	Y	
Orta Dikme	23	Stewart Teoremi	64	Yamuk	30
Orta Nokta	5, 45	Stewart ve Carnot	64	Yamukta Köşegen Bağlantısı	31
Orta Taban	23	Stewart'ın Özel Hâlleri	64	Yamuk ve Alanı	30
Orta Tabanlarla Bölünme	26	T		Yan Kenarın Orta Noktası	30
Orta Taban ile Yeni Üçgenler	23	Tabana Çizilen Doğru Parçası	17	Yarım Küre	59
Orta Taban ve Köşegenler	30	Tabana Paralel Kesit	56, 61	Yay Uzunluğu	43
Ö		Tabandan Dikmeler	17	Yıldız Çokgenler	28
Öklid: Kenar Bağlantıları	18	Tabandan Paraleller	17	Yöndeş Açılar (F)	8
Öklid: Yükseklik Bağlantısı	18	Taban × Yükseklik	25	Yükseklik	23
Öteleme	52	Tam Sayı Kenar Soruları	12	Yükseklikleri Eşit Üçgenler	26
Öteleme, Yansıma ve Dönme	52	Teğetler Dörtgeni ve Pitot	42	Yükseklikler ve Kenarlar	23
Özel Açılar Tablosu	20	Teğet Çemberler	39	Yükseklik ile Açısıortay Arasındaki Açısı	10
Özel Açılı Dik Üçgenler	19	Teğet Denklemi: Genel Merkez	51	Yükseklik ≤ Açısıortay ≤ Kenarortay	13
Özel Dilimler	43	Teğet Denklemi: Merkez Orijinde	51	Yükseklik, Orta Taban ve Orta Dikme	23
Özel Doğrular	47	Teğet Düzlem	59	Yüz Köşegenleri	55
Özel Prizmalar	56	Teğet Özellikleri ve Ortak Teğetler	39	Z	
P		Teğet ve Kesen	35	Zıt Işıklar	5
Paralelkenar	32	Teğet ve Merkezden Geçen Kesen	38	1	
Paralelkenarın Dördüncü Köşesi	46	Teğet Yarıçapa Diktir	39	15° – 75° – 90°	19
Paralel Doğrular	5	Teğet – Kesen	40	3	
Paralel Doğrulara Açılar	8	Teğet–Kiriş Açısı	37	3 – 4 – 5 Üçgeni	19
Paralel Doğrular Arası Uzaklık	48	Teğet–Kiriş = Çevre Açısı	37	30° – 30° – 120°	19
Paralel İki Doğruya Eşit Uzaklık	49	Temel İlkeler (Aksiyomlar)	4	30° – 60° – 90°	19
Paralel Kirişler	36	Temel Orantı (A Modeli)	16	4	
Paralel ve Dik Doğrular	48	Temel Özdeşlikler	20	45° – 45° – 90°	19
Piramitler	57	Temel Tanımlar	4		
Piramit ve Hacmi	57	Thales: Paralel Bantlar	16		
Pisagor Teoremi	18	Toplam Alan	56, 57		
Pisagor Üçlüleri	19	Trigonometrik Oranlar	20		